

TEMAS

Continuidad y límites.

Leyes de los límites.

Teorema de la compresión o del Sándwich.

(Regla de L' Hôpital que no es de este curso, para su conocimiento y uso para verificación de resultados)

Definición. Una función es continua en un intervalo si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.

NOTAS:

1) Al reconocer que las funciones son continuas y que el cálculo de su límite no es de la forma indeterminada $0/0, \infty/\infty, \infty \cdot 0, \infty - \infty$, se procede por evaluación directa.

2) Al reconocer a funciones continuas, se aplican las leyes de los límites:

Sean L, M, c y k valores reales, f y g funciones continuas apropiadas.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow c} x) = f(c) = L.$$

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(\lim_{x \rightarrow c} x) = g(c) = M.$$

$$\text{Regla de la suma: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + g(\lim_{x \rightarrow c} x) = L + M.$$

$$\text{Regla de la diferencia: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - g(\lim_{x \rightarrow c} x) = L - M.$$

$$\text{Regla del múltiplo constante: } \lim_{x \rightarrow c} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x) = kL.$$

$$\text{Regla del producto: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(\lim_{x \rightarrow c} x) = L \cdot M.$$

$$\text{Regla del cociente: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(\lim_{x \rightarrow c} x) = L/M, \text{ con } M \neq 0.$$

$$\text{Regla de la potencia: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow c} f(x))^n = L^n.$$

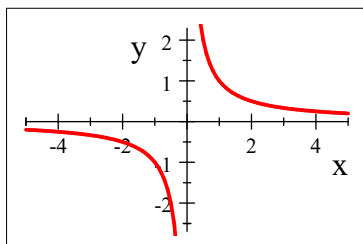
Regla de la raíz: $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, n entero positivo, para n par se debe tener $L \geq 0$.

3) Se asume que para funciones continuas se cumple que el límite pasa dentro del argumento: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow c} x)$ siempre que el punto o tenga problemas a la derecha e izquierda de c . Además $x \rightarrow c$ significa que se puede aproximar por valores a la derecha e izquierda de c .

4) Regla de L' Hôpital: $\frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g'(x)}$ donde f' y g' son las derivadas correspondientes.

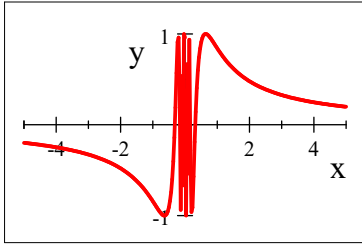
Ejemplos de funciones continuas y discontinuas:

1) Sea $h(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$.



Ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \infty$

2) Sea $\sin(\frac{1}{x})$ es discontinua en $x = 0$.



Ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(\frac{1}{x})$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(\frac{1}{x})$ no existen, cuando $x \rightarrow 0^-$ y $x \rightarrow 0^+$, la función oscila entre valores en el intervalo $[-1, 1]$.

0^-	0^+
$\sin(\frac{1}{-0.001}) = -0.82688$	$\sin(\frac{1}{0.001}) = 0.82688$
$\sin(\frac{1}{-0.0001}) = 0.30561$	$\sin(\frac{1}{0.0001}) = -0.30561$
$\sin(\frac{1}{-0.000001}) = 0.34999$	$\sin(\frac{1}{0.000001}) = -0.34999$
$\sin(\frac{1}{-0.0000001}) = -0.42055$	$\sin(\frac{1}{0.0000001}) = 0.42055$

Entonces no existe $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ o sea, la función es discontinua.

3) Sea $x \sin(\frac{1}{x})$ es continua en $x = 0$.

Teorema de la compresión o del Sándwich.

Si para todo valor alrededor de c se cumple:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ y se tiene que } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

$$\text{Entonces } \lim_{x \rightarrow c} h(x) = f(\lim_{x \rightarrow c} x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

$$\text{Se tiene que } |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| |x \sin(\frac{1}{x})|.$$

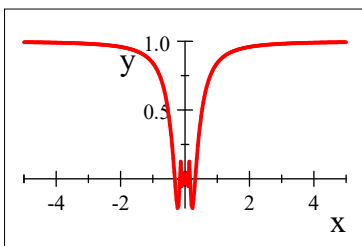
$$\text{Entonces } 0 \leq |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

$$\text{Por el teorema del Sándwich: } \lim_{x \rightarrow 0} |x \sin(\frac{1}{x})| = 0, \text{ O sea}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin(\frac{1}{x})) = 0.$$

Por tanto la función $x \sin(\frac{1}{x})$ es continua en todos los números reales.



Determinar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{x(\cos(3x))^3}.$

Respuesta.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{x(\cos(3x))^3} = (\text{Por reglas de los límites y como no es una forma indeterminada}) \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin(3x)}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} x (\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos(3x))^3} = \frac{\sin(3 \frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3} (\cos(3 \frac{\pi}{3}))^3} = \frac{\sin(\pi)}{\frac{\pi}{3} (\cos(\pi))^3} = \frac{0}{-\frac{1}{3}\pi} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc(3x)}{x(\cot(3x))^3}.$

RESPUESTA.

Usamos desigualdades trigonometricas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc(3x)}{x(\cot(3x))^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin(3x)}}{x \left(\frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} \right)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(3x)}{x \sin(3x) \cos^3(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \cos^3(3x)} \approx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{x \cos^3(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{\cos^3(3x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 9x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos^3(3x)} = \frac{9 \lim_{x \rightarrow 0} x}{\cos^3(\lim_{x \rightarrow 0} 3x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + 3x - 18}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} \right)$

RESPUESTA.

$\frac{3x^2 + 3x - 18}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$ no se puede sustituir porque resulta una forma indeterminada.

Se multiplica por el conjugado apropiado:

$$\frac{3x^2 + 3x - 18}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 5} + 3}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}.$$

Se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 3x - 18}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x^2 + 3x - 18)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x^2 + 3x - 18)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x+2)(x-2)} =$$

(una forma de eliminar la division entre cero, es considerar si se simplifica

$$\frac{3x^2 + 3x - 18}{x-2}$$

Realizando la división:

$$\begin{array}{r} 3x + 9 \\ x - 2 \overline{) 3x^2 + 3x - 18} \\ \underline{-3x^2 + 6x} \\ 9x - 18 \\ \underline{-9x + 18} \\ 0 \end{array}$$

Sustituyendo, se tiene entonces que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 3x - 18}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x+9)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x+2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x+9)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)} =$$

(ya se puede sustituir)

$$\frac{(3(2)+9)(\sqrt{(2)^2 + 5} + 3)}{((2)+2)} = \frac{(15)(6)}{4} = \frac{90}{4} = \frac{45}{2} = 22.5.$$

Una forma de verificar es por PhotoMath

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + 3x - 18}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} \right)$$

Calcular

$$\frac{45}{2} = 22.5$$



Problemas similares

Quiz

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}} \rightarrow$$

$$t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \rightarrow$$

y otra forma es por medio de una tabla de aproximaciones usando alrededor de 2.

Sea $j(x) = \frac{3x^2 + 3x - 18}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$, los cálculos se realizan con una buena calculadora científica:

2^-

2^+

$$j(1.99) = 22.486 \quad j(2.01) = 22.514$$

$$j(1.999) = 22.499 \quad j(2.001) = 22.501$$

↓

↓

22.5

22.5

Note que existen los límites laterales, son iguales y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 3x - 18}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = 22.5$$

2. Calcular los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + 11x + 7x^2}}{2x}.$$

RESPUESTA.

Para límites al infinito se cambia cocientes apropiados de la variable.

Se hace un cambio de variable $x = -y$ y el límite cambia a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + 11x + 7x^2}}{2x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 11(-y) + 7y^2}}{2(-y)} \cdot \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} =$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{11}{y} + 7}}{-2 \frac{y}{y}} =$$

(se simplifica y aplican las reglas de los límites)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{11}{y} + 7}}{-2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{11}{y} + \lim_{y \rightarrow \infty} 7} = -\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Se puede verificar por PhotoMath. O se puede verificar por medio de una tabla:

Note que $-\frac{\sqrt{7}}{2} \approx -1.3229$.

Sea $h(x) = \frac{\sqrt{1 + 11x + 7x^2}}{2x}$, los cálculos se realizan con una buena calculadora científica:

$-\infty$

$$h(-1000) = -1.3239$$

$$h(-100000) = -1.3229$$

$\downarrow$

$$-1.3229$$

Note que existen los límites laterales, son iguales y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+11x+7x^2}}{2x} \approx -1.3229.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|-3x+1|}{2x-5} = -\frac{4}{7}$$

RESPUESTA.

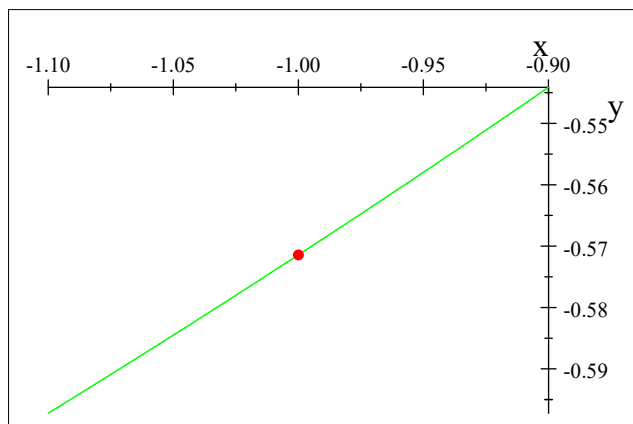
No hay problema al evaluar el límite

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|-3x+1|}{2x-5} = \frac{|-3(-1)+1|}{2(-1)-5} = -\frac{4}{7}.$$

Se puede verificar por PhotoMath. O se puede verificar por medio de una tabla.

O mediante una grafica de la zona cerca de -1 . El punto $(-1, -\frac{4}{7})$ (rojo) pertenece a

$\frac{|-3x+1|}{2x-5}$ (verde). Note que $-\frac{4}{7} \approx -0.57143$.



Repaso de asíntotas.

Verticales.

Horizontales.

Oblicuas.

Cuando no existen límites hacia $-\infty$ y ∞ .

Ejemplos sin álgebra:

Realizar el bosquejo de una función f y sus asíntotas que cumple:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

Tiene a lo más dos raíces y es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

RESPUESTA.

$y = 1$ es una asíntota vertical (azul rayas)

$x = 3$ es una asíntota horizontal izquierda (rojo rayas)

$x = -2$ es una asíntota horizontal derecha (verde rayas)

Las raíces son $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{3}{2}$ (puntos purpuras)

La gráfica de la función es la línea café.

