

TEMAS

Teorema del valor intermedio.

En matemáticas elaboramos un sistema de conocimientos lógico que parte de definiciones o conceptos sencillos y por medio de construcción deductivas o pasos de una demostración se construyen o deducen nuevos resultados.

En Matemáticas a diferencia de la Física y la Química, no se usa el método científico para validar los conceptos, solo se utilizan construcciones lógicas y desarrollos matemáticos.

En Sistema Lógico de Conocimientos Matemáticos usa los términos:

Definición. Es una oración que relaciona objetos con propiedades sencillas o evidentes.

Axioma. Es una oración cuya veracidad es clara o evidente que no requiere demostración o explicación.

Proposición. Es un párrafo compuesto de varias oraciones generalmente separadas por el operador lógico "entonces" que determina cuáles son las bases o antecedentes (también conocidas como hipótesis) y cuáles son las consecuencias (resultados o nuevos conceptos derivados de los antecedentes). Las proposiciones se deben demostrar mediante los desarrollos lógicos y matemáticos apropiados, que cuando se llega a las consecuencias se considera verdaderos y válidos. De otra forma una proposición sin demostración correcta es inválida.

Se le llama Teorema a una proposición de largos párrafos o bien por ser un resultado históricamente sobresaliente. Como en el caso del Teorema de Valor Intermedio.

Se le llama Corolario a una proposición corta que se deriva de un teorema y cuya demostración y certeza se explica de forma resumida de un resultado previo.

Las notas anteriores son para aumentar tu vocabulario y entendimiento de las Matemáticas y es aconsejable que leas al respecto o consultes a otras personas para mejorar tu lenguaje universitario.

Teorema del valor intermedio.

Sea f una función **continua**, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sean a, b dos números reales tales que $a < b$.

Si $f(a)f(b) < 0$ entonces existe al menos un valor c en el intervalo (a, b) , tal que $f(c) = 0$.

Notas:

- 1) Las funciones continuas se trazan sin despegar el lápiz.
- 2) La condición del producto de los valores de f en a y en b , significa que $f(a)$ es un valor negativo y $f(b)$ es un valor positivo, o bien, lo contrario: que $f(a)$ es un valor positivo y $f(b)$ es un valor negativo.

Ejemplos.

1. Determinar un intervalo de longitud a lo más $\frac{1}{4}$ donde se tenga una solución de la ecuación:

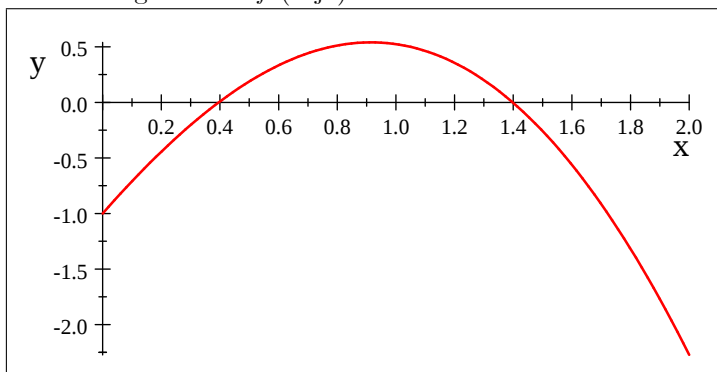
$$3 \sin(x) - x^2 = 1.$$

RESPUESTA.

A la ecuación $3 \sin(x) - x^2 = 1$, le aplicamos la regla de la balanza, sumándole -1 a ambos lados: $3 \sin(x) - x^2 - 1 = 0$. Se construye la función $f(x) = 3 \sin(x) - x^2 - 1$.

Note que los ceros de f son solución de la ecuación dada.

Un esbozo gráfico de f (rojo) es



Se toma $x_0 = 0.3$ y $x_1 = 0.5$ cuya distancia es menor a $\frac{1}{4} = 0.25$.

Además $f(0.3) = -0.20344$ y $f(0.5) = 0.18828$.

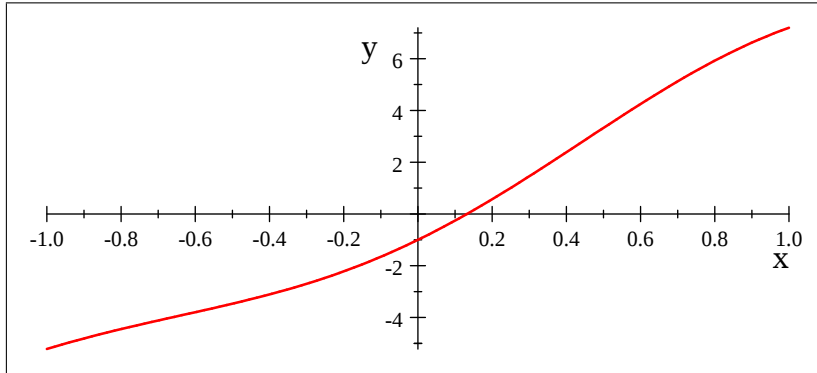
Por el Teorema del valor intermedio en el intervalo $[0.3, 0.5]$ la función f tiene un cero, o sea en este intervalo hay una solución para la ecuación $3 \sin(x) - x^2 = 1$.

5. Determinar si existe un intervalo de longitud a lo más $\frac{1}{10}$ que contenga al menos una raíz de la función:

$$h(x) = 5 \sin(x) - \cos(3x) + 2x.$$

RESPUESTA.

Un esbozo gráfico de h (rojo) es



Se toma $x_0 = 0.1$ y $x_1 = 0.15$ cuya distancia es menor a $\frac{1}{10} = 0.1$.

Además $h(0.1) = -0.25617$ y $h(0.15) = 0.14674$.

Por el Teorema del valor intermedio en el intervalo $[0.1, 0.15]$ la función h tiene un cero.