Dos ejemplos de graficas y propiedades de una función

Ejemplo 1) Sea $f_1(x) = x^3 - 3x + 2$

$\frac{d}{dx}f_1(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$

$\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) = 6x.$

$\frac{d^3}{dx^3}f_1(x) = 6.$

Puntos críticos

$\frac{d}{dx}f_1(x) = 0, 3(x^2 - 1) = 0,\ x_1 = -1, x_2 = 1.$

$x_1 = -1$ es un máximo local ya que $\frac{d^2}{dx^2}f_1(-1) = -6 < 0.$

$x_2 = 1$ es un mínimo local ya que $\frac{d^2}{dx^2}f_1(1) = 6 > 0.$

Puntos de inflexión.

$\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) = 0,\ 6x_3 = 0,\ x_3 = 0.$

0 es punto de inflexión porque $\frac{d^3}{dx^3}f_1(x_3) = 6 \neq 0.$

Concavidad y convexidad.

En $(-\infty, 0)$, $\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) = 6x < 0$. Por tanto es concava.

En $(1, \infty)$, $\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) = 6x > 0$. Por tanto es convexa.

Zonas de crecimiento y decrecimiento.

En $(-\infty, -1), \frac{d}{dx}f_1(x) = 3x^2 - 3 > 0,$ es creciente.

En $(-1, 1), \frac{d}{dx}f_1(x) = 3x^2 - 3 < 0,$ es decreciente.

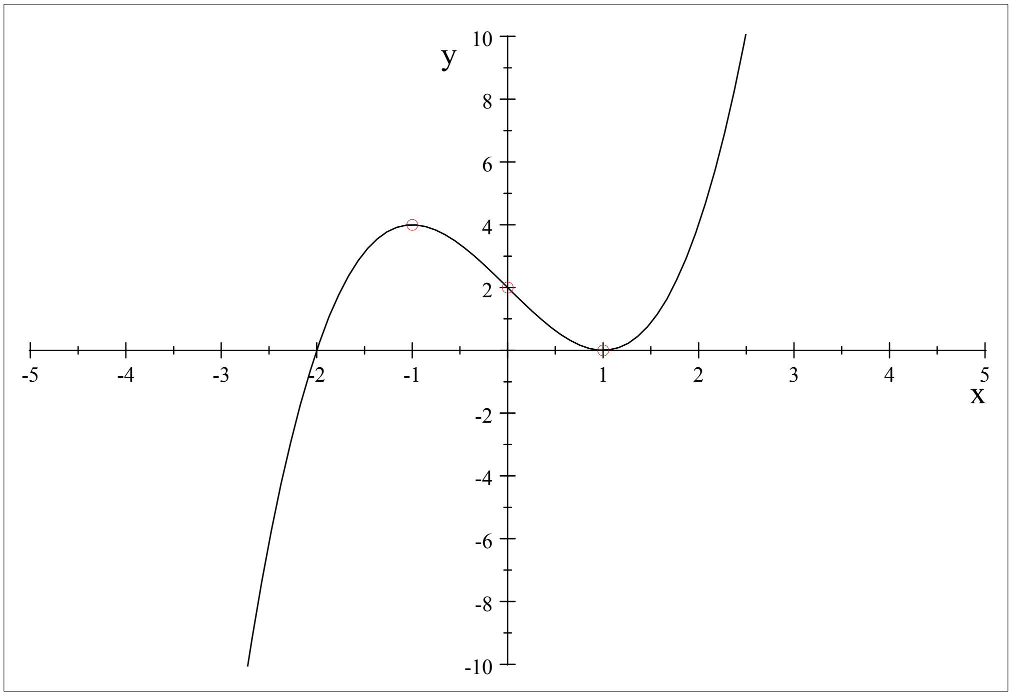
En $(1, \infty), \frac{d}{dx}f_1(x) = 3x^2 - 3 > 0,$ es creciente.

Comportamiento asintotico

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \infty$

El dominio de f_1 es $\mathbf{R}$ y su rango es $\mathbf{R}$.
La gráfica de $f_1(x) = x^3 - 3x + 2$ es



Ejemplo 2) Sea $f_2(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Tiene una raiz en $x = 0. f_2(0) = 0.$

$\frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}(x-3).$

$\frac{d^2}{dx^2} f_2(x) = 6\frac{x}{(x-1)^4}.$

$\frac{d^3}{dx^3} f_2(x) = -6\frac{3x+1}{(x-1)^5}.$

Puntos críticos

$\frac{d}{dx} f_2(x) = 0, \frac{x_1^2}{(x_1-1)^3}(x_1-3) = 0,\ x_1 = 3.$

$x_1 = 3$ es un punto crítico.

Usando la segunda derivada

Como $\frac{d^2}{dx^2} f_2(3) = 6\frac{3}{(3-1)^4} = \frac{9}{8} > 0.$

El punto $x_1 = 3$ es un punto mínimo, $f_2(3) = \frac{27}{4}.$

Puntos de inflexión.

$\frac{d^2}{dx^2} f_2(x) = 6\frac{x_2}{(x_2-1)^4} = 0, x_2 = 0.$

Es punto de inflexión porque $\frac{d^3}{dx^3} f_2(x_2) = -6\frac{3x_2+1}{(x_2-1)^5} = -6\frac{1}{(-1)^5} = 6 \neq 0.$

Concavidad y convexidad.

En $(-\infty, 0)$, $\frac{d^2}{dx^2} f_2(x) = 6\frac{x}{(x-1)^4} < 0$. Por tanto concava.

En $(0, 1)$, $\frac{d^2}{dx^2} f_2(x) = 6\frac{x}{(x-1)^4} > 0$. Por tanto convexa.

En $(1, \infty)$, $\frac{d^2}{dx^2} f_2(x) = 6\frac{x}{(x-1)^4} > 0$. Por tanto convexa.

Comportamiento asintotico

En $x = 1$ se tiene

Por la izquierda de 1, $\lim_{x\to 1^-} f_2(x) = \infty$

Por la derecha de 1, $\lim_{x\to 1^+} f_2(x) = \infty$

Por tanto en $x = 1$, $\lim_{x\to 1} f_2(x) = \infty$.

Además, $\lim_{x\to -\infty} f_2(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \infty$.

Zonas de crecimiento y decrecimiento.

En $(-\infty, 1), \frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}(x-3) > 0,$ es creciente.

En $(1, 3), \frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}(x-3) < 0,$ es decreciente.

En $(3, \infty), \frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}(x-3) > 0,$ es creciente.

El domino de esta función es $\mathbf{R} \setminus \{\mathbf{1}\}$. Su rango es $\mathbf{R}$.

La gráfica de $f_2(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ es