Ejercicios 2011, 5, 17.

Calcular por sumas de Riemann

1) $\int_0^x zdz$. 2) $\int_0^x z^3 dz$.

$x > 0.$

Sugerencia. $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{j=1}^n j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Calcular

3) $\int_0^1 f_1(x)dx$, donde $f_1(x) = x^3 - 3x + 2.$

Sugerencia use 1), 2), que $\int_0^x dz = x$, y las propiedades de la integral definida

RESPUESTAS:

Usando la formula de intervalos iguales y sabiendo que las funciones son crecientes.

$\Delta x = \frac{x}{n}$, $x_j = x_0 + j\Delta x$, pero como $x_0 = 0$, se tiene $x_j = j\frac{x}{n}$.

Usando esto se tiene que

$\int_0^x f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \max(f(x_{j-1}), f(x_j))\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(x_j)\frac{x}{n} =$
$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(j\frac{x}{n})\frac{x}{n}$.

Para 1) $\int_0^x zdz = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n (j\frac{x}{n})\frac{x}{n} = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j =$
$x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} n(n+1) = \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}) = \frac{x^2}{2}(1)(1+0) = \frac{x^2}{2}.$

2) $\int_0^x z^3 dz. = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n (j\frac{x}{n})^3\frac{x}{n} = x^4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{j=1}^n j^3 =$
$x^4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(n(n+1))^2 = \frac{x^4}{4} \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n}(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}))^2 =$
$\frac{x^4}{4}(1)^2(1+0)^2 = \frac{x^4}{4}.$

3) $\int_0^1 f_1(x)dx$, donde $f_1(x) = x^3 - 3x + 2.$

Sustituyendo.

$\int_0^1 (x^3 - 3x + 2)dx =$

(Usamos que $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$)

$\int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 3xdx + \int_0^1 2dx =$

(Usamos que $kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$)

$\int_0^1 x^3 dx - 3\int_0^1 xdx + 2\int_0^1 dx =$

(Aplicamos las formulas calculadas $\int_0^x dz = x$, $\int_0^x zdz = \frac{x^2}{2}$, $\int_0^x z^3 dz = \frac{x^4}{4}$ y sustituimos x=1 en estas fórmulas)

$\frac{1^4}{4} - 3\frac{1^2}{2} + 2(1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{1-6+8}{4} = \frac{9-6}{4} = \frac{3}{4}.$