Ejemplos 1.

Aproximación por sumas de Reimann de la integral $\int_{-2}^{2} x^2 dx$.

1) Realice la gráfica de la función $f(x) = x^2$
2) Encuentre los puntos críticos
3) Encuentre los puntos máximos y mínimos
4) Encuentre las zonas donde es creciente y donde es decreciente
5) Identifique el tipo de función (par, impar, periodica).

Para intervalos iguales donde $\Delta x_n = \frac{b-a}{n}$ las formulas de Reimann para aproximar la integral son:

Suma Superior $S(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} \max(f(x_{j-1}), f(x_j))$.

Suma Inperior $I(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} \min(f(x_{j-1}), f(x_j))$.

Suma punto medio, $M(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right)$.

6) Aproxime la integral con $n = 2, 4, 8$.

RESPUESTA.

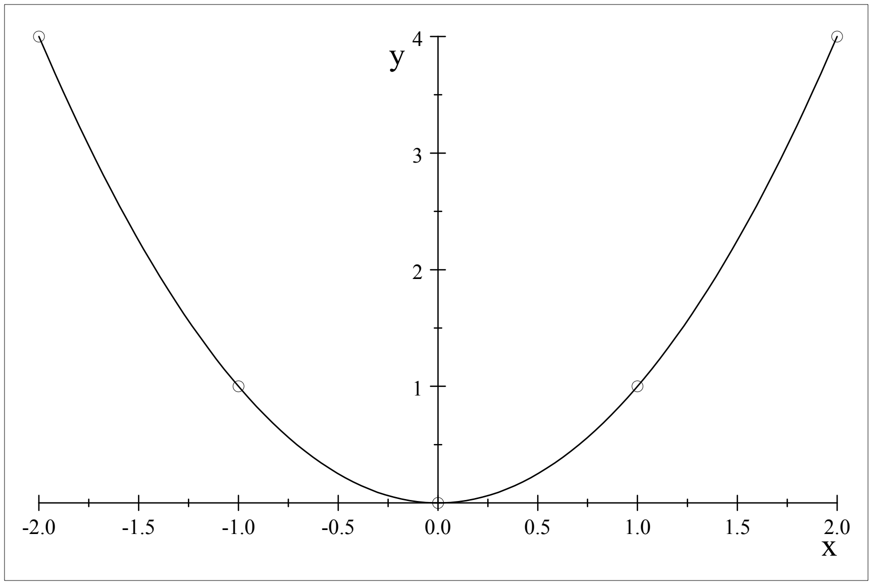
1) Por la integral se supone que el dominio de f es $[-2, 2]$.

Por tanto el rango de f es $[0, 4]$.

Una tabla de pares de puntos para la gráfica es

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Por la continuidad de f la gráfica es



Los pequeños circulos en la gráfica corresponden con los puntos de la tabla.

2) Encuentre los puntos críticos.
Un punto crítico cumple que $g'(x^*) = 0$ (g es una función continua).
En este caso $f'(x) = 2x$.
Por tanto $f'(x^*) = 2x^* = 0$, luego el único punto crítico es $x^* = 0$.
(Es único por que es la única raiz del polinomio de grado 1, $2x$).
3) Encuentre los puntos máximos y mínimos locales.
Para g una función continua,
Un punto máximo local cumple las condiciones
a) $g'(x^*) = 0$
b) $g''(x^*) < 0$.
Y un punto mínimo local cumple las condiciones
c) $g'(x^*) = 0$
d) $g''(x^*) > 0$.
Para $f(x) = x^2$, $f''(x) = 2$.
Por tanto x^* es un mínimo local ya que cumple:
c) $f'(x^*) = 0$.
d) $f''(x^*) = 2 > 0$.
4) Encuentre las zonas donde es creciente y donde es decreciente.
Para g una función continua,es creciente en (c,d) si para todo $x \in (c,d)$, $g'(x) > 0$.
Para g una función continua,es decreciente en (c,d) si para todo $x \in (c,d)$, $g'(x) < 0$.
Con $x \in (0,\infty)$, $f'(x) = 2x > 0$, luego f es creciente en el intervalo $(0,\infty)$.
Por otro lado, $x \in (-\infty,0)$, $f'(x) = 2x < 0$, luego f es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$.

5) Identifique el tipo de función (par, impar, periodica).
Una función g es par si $g(-x) = g(x)$.
Una función g es impar si $g(-x) = -g(x)$.
Una función g es peridica si $g(x+T) = g(x)$ donde $T > 0$.
Para $f(x) = x^2$, es para ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

6) Aproxime la integral con $n = 2, 4, 8$.
Como la función es par (por el inciso 5) se tiene
$\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx$.
Con intervalos de igual longitud en $[a, b]$ se tiene
$\Delta x_n = \frac{b-a}{n}$ y los puntos son $x_j = x_0 + j\Delta x_n, j = 0, 1, \ldots, n$.
En este caso $a = 0, b = 2$.
Además $x_0 = a = 0$ y $x_j = j\Delta x_n, j = 0, 1, \ldots, n$.
Como la función $f(x) = x^2$ es creciente en $(0, \infty)$ (por el inciso 4) las fórmulas SS(n) y SI(n) se simplifican a
$S(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} \max(f(x_{j-1}), f(x_j)) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$.
$I(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} \min(f(x_{j-1}), f(x_j)) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})$.
Como se trata de intervalos de igual longitud la fórmula de punto medio se puede reescribir como
$M(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f(x_j - \frac{\Delta x_n}{2}) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f(j\Delta x_n - \frac{\Delta x_n}{2}) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f\left(\Delta x_n \left(\frac{2j-1}{2}\right)\right)$.
Tenemos por tanto
$S(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$.
$I(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})$.
$M(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f\left(\Delta x_n \left(\frac{2j-1}{2}\right)\right)$.
Resolvemos la pregunta para $n = 2, 4, 8$.
Para $n = 2, \Delta x_2 = \frac{2-0}{2} = 1$
$S(2) = \Delta x_2 \sum_{j=1}^{2} f(j\Delta x_n) = f(1) + f(2) = 5$.
En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2(5) = 10$
$I(2) = \Delta x_2 \sum_{j=1}^{2} f((j-1)\Delta x_n) = f(0) + f(1). = 1$.
En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2(1) = 2$.
$M(2) = \Delta x_2 \sum_{j=1}^{2} f\left(\Delta x_2 \left(\frac{2j-1}{2}\right)\right) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$.
En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2(\frac{5}{2}) = 5$.

Para $n = 4, \Delta x_4 = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$
$S(4) = \Delta x_4 \sum_{j=1}^{4} f(j\Delta x_4) = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2}) + f(2)). = \frac{15}{4} = 3.75$

En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2(\frac{15}{4}) = \frac{15}{2} = 7.5$

$I(4) = \Delta x_2 \sum_{j=1}^{4} f((j-1)\Delta x_4) = \frac{1}{2}(f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2})). = \frac{7}{4} = 1.75$

En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2(\frac{7}{4}) = \frac{7}{2} = 3.5$

$M(4) = \Delta x_4 \sum_{j=1}^{4} f\left(\Delta x_4\left(\frac{2j-1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(\frac{5}{4}) + f(\frac{7}{4})) = \frac{21}{8} = 2.625$

En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2\left(\frac{21}{8}\right). = \frac{21}{4} = 5.25$

Para $n = 8, \Delta x_2 = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$

$S(8) = \Delta x_8 \sum_{j=1}^{8} f(j\Delta x_8) = \frac{1}{4}(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}) + f(1) + f(\frac{5}{4}) + f(\frac{3}{2}) + f(\frac{7}{4}) + f(2)) = \frac{51}{16} = 3.1875$

En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2\left(\frac{51}{16}\right) = \frac{51}{8} = 6.375$

$I(8) = \Delta x_8 \sum_{j=1}^{8} f((j-1)\Delta x_8) = \frac{1}{4}(f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}) + f(1) + f(\frac{5}{4}) + f(\frac{3}{2}) + f(\frac{7}{4})$
$\frac{35}{16} = 2.1875$

En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2\left(\frac{35}{16}\right) = \frac{35}{8} = 4.375$

$M(8) = \Delta x_8 \sum_{j=1}^{8} f\left(\Delta x_8\left(\frac{2j-1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) + f\left(\frac{9}{8}\right) + f\left(\frac{11}{8}\right) + \right.$
$\frac{85}{32} = 2.6563$

En este caso $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_{0}^{2} x^2 dx \approx 2\left(\frac{85}{32}\right) = \frac{85}{16} = 5.3125$

Forma adicional de resolver el problema anterior.

A las fórmulas de las sumas de Reimann anteriores se pueden simplificar aún mas sustiyendo $f(x) = x^2, \Delta x_n = \frac{2}{n}$, y $x_j = j\Delta x_n, j = 0, 1, \ldots, n$.

Se tiene,

$S(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f(j\Delta x_n) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f(j\frac{2}{n}) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2j}{n}\right)^2.$

$I(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f((j-1)\Delta x_n) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f((j-1)\frac{2}{n}) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2(j-1)}{n}\right)^2.$

$M(n) = \Delta x_n \sum_{j=1}^{n} f\left(\Delta x_n\left(\frac{2j-1}{2}\right)\right) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{(j-1)\frac{2}{n} + j\frac{2}{n}}{2}\right) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2j-1}{n}\right)^2.$

Así, las sumatorias solo dependan de n

$S(n) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2j}{n}\right)^2.$

$I(n) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2(j-1)}{n}\right)^2.$

$M(n) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2j-1}{n}\right)^2.$

$S(2) = 5$

$I(2) = 1$

$M(2) = \frac{5}{2} = 2.5$

$S(4) = \frac{15}{4} = 3.75$

$I(4) = \frac{7}{4} = 1.75$

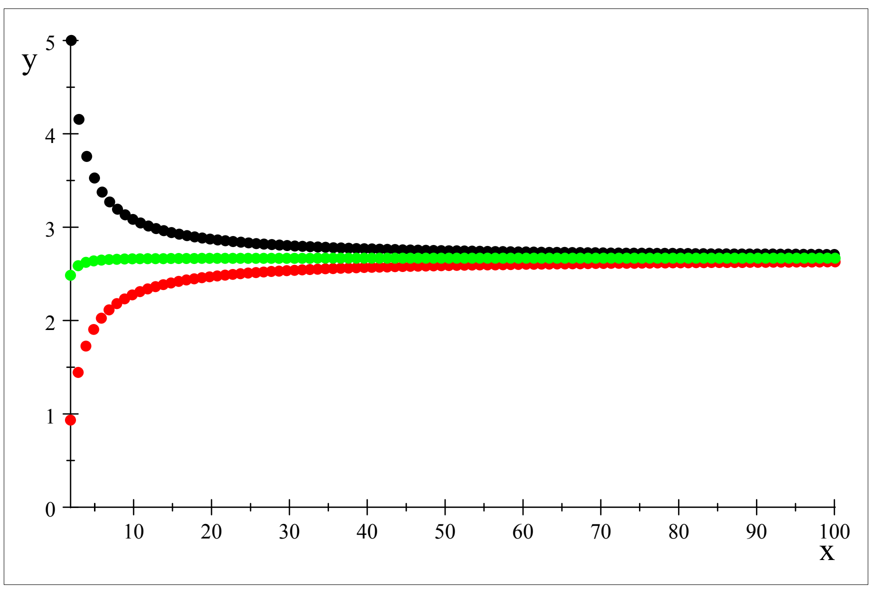
$M(4) = \frac{21}{8} = 2.625$

$S(8) = \frac{51}{16} = 3.1875$
$I(8) = \frac{35}{16} = 2.1875$
$M(8) = \frac{85}{32} = 2.6563$

$S(100) = \frac{6767}{2500} = 2.7068$
$I(100) = \frac{6567}{2500} = 2.6268$
$M(100) = \frac{13333}{5000} = 2.6666$

El valor exacto de la integral es $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \approx 2.6667$ y el mejor resultado se obtiene de la fórmula de punto medio.

-



$S(n)$ negro, $I(n)$ rojo, $M(n)$ verde

Notamos que las sumas de Reimann aproximan muy lentamente al resultado.