SOLUCION **PRIMER EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II**

Trimestre 11-P. Junio 2 de 2011.

(**1**)(**15**%). Calcular la derivada de la función (Sugerencia derive usando logaritmo)

$$h(x) = \frac{\sqrt[3]{\arctan(1+e^{2x})}\,(2\arccos(x)-\pi)^2 e^{2x}}{\sin^3(-\frac{1}{4}x^2+1)}$$

RESPUESTA:

Siguiendo la sugerencia, se deriva por logaritmos

$\ln(h(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{\arctan(1+e^{2x})}\,(2\arccos(x)-\pi)^2 e^{2x}}{\sin^3\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)}\right)$

$\frac{d}{dx}\ln(h(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\ln(\arctan(1+e^{2x}) + 2\ln(2\arccos(x)-\pi) + \ln(e^{2x}) - 3\ln(\sin(-\frac{1}{4}x^2+1)\right)$

$\frac{1}{h(x)}\frac{d}{dx}h(x) = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(\ln(\arctan(1+e^{2x})) + 2\frac{d}{dx}(\ln(2\arccos(x)-\pi)) + 2\frac{d}{dx}x - 3\frac{d}{dx}(\ln(\sin(-\frac{1}{4}x^2+1)))$

$\frac{1}{h(x)}\frac{d}{dx}h(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\arctan(1+e^{2x})}\frac{d}{dx}(\arctan(1+e^{2x})) + 2\frac{1}{(2\arccos(x)-\pi)}\frac{d}{dx}((2\arccos(x)-\pi)) + 2 - 3\frac{1}{\left(\sin\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)\right)}\frac{d}{dx}(\sin(-\frac{1}{4}x^2+1))$

$\frac{1}{h(x)}\frac{d}{dx}h(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\arctan(1+e^{2x})}\frac{1}{1+(1+e^{2x})^2}\frac{d}{dx}(1+e^{2x}) - 2\frac{1}{(2\arccos(x)-\pi)}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 3\frac{1}{\left(\sin\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)\right)}\cos(-\frac{1}{4}x^2+1)\frac{d}{dx}((-\frac{1}{4}x^2+1))$

$\frac{1}{h(x)}\frac{d}{dx}h(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\arctan(1+e^{2x})}\frac{2}{1+(1+e^{2x})^2}e^{2x} - 2\frac{1}{(2\arccos(x)-\pi)}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 3\frac{1}{\left(\sin\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)\right)}\cos(-\frac{1}{4}x^2+1)(-\frac{1}{2}x)$

$\frac{d}{dx}h(x) = \left(\frac{1}{3}\frac{1}{\arctan(1+e^{2x})}\frac{2}{1+(1+e^{2x})^2}e^{2x} - 2\frac{1}{(2\arccos(x)-\pi)}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 3\frac{1}{\left(\sin\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)\right)}\cos(-\frac{1}{4}x^2+1)(-\frac{1}{2}x)\right)\frac{\sqrt[3]{\arctan(1+e^{2x})}\,(2\arccos(x)-\pi)^2 e^{2x}}{\sin^3\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)}$

(**2**) Calcular

2.**1**)(**15**%) $\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x} t\cos(t^2)\sqrt[3]{\sin(t^2)}\,dt$

RESPUESTA.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo y la derivada de la función composiciòn se tiene:

$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x} t\cos(t^2)\sqrt[3]{\sin(t^2)}\,dt = \sin(x)\cos(\sin^2 x)\sqrt[3]{\sin(\sin^2 x)}\cos(x)$

2.**2**)(**5**%) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$

RESPUESTA

Por la regla de sustitución $u = 4+x^3; du = 3x^2dx$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}\,dx = \frac{1}{3}\int (u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C = \frac{2}{3}\sqrt{4+x^3} + C$

2.**3**)(**15**%) $\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}} g(z)dz$ donde $g(x) = \begin{cases} 2\ln|x| & \text{Si } x \in [-2,-1] \\ x^2 & \text{Si } x \in (-1,1) \\ \cos(x) & x \in [1, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

RESPUESTA.

La función es integrable por ser continua con un número finito de discontinuidades. Note que para $\int \ln|z|dz$ no hemos visto como calcular su primitiva y se deja indicada.

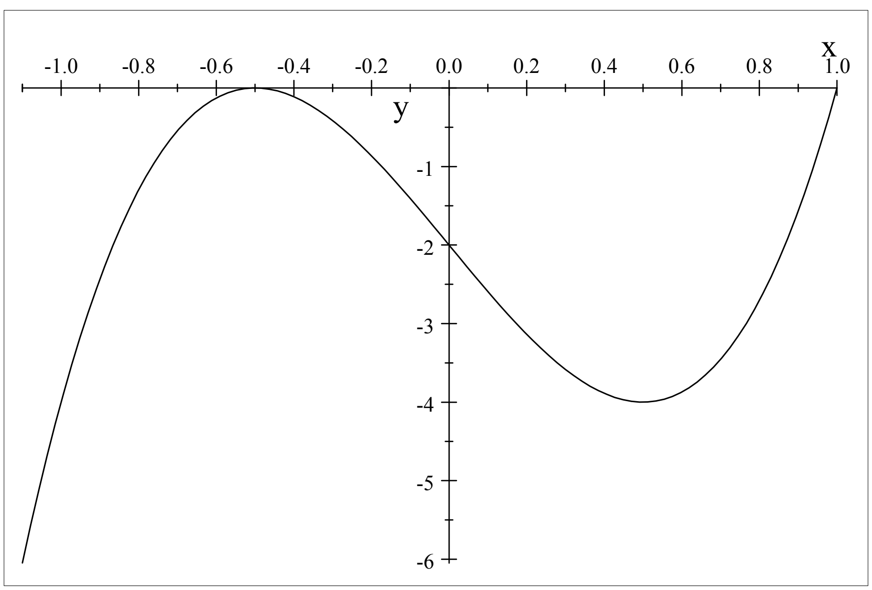
$\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}} g(z)dz = 2\int_{-2}^{-1} \ln|z|dz + \int_{-1}^{1} z^2dz + \int_{1}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z)dz = 2\int_{-2}^{-1} \ln|z|dz + \frac{1}{3}z^3|_{-1}^{1} + \sin(z)|_1^{\frac{\pi}{2}} =$
$2\int_{-2}^{-1} \ln|z|dz + \frac{1}{3}z^3|_{-1}^{1} + \sin(z)|_1^{\frac{\pi}{2}} = 2\int_{-2}^{-1} \ln|z|dz + \frac{2}{3} + 1 - \sin(1).$

Por otro lado, para $z \geq 0$, $\int \ln z dz$ se integra por partes (tema que no lo hemos visto $\int u dv = uv - \int v dy$). Se cálcula su integral (pero no se considera para este examen).
Sea $u = \ln z; dv = dz, du = \frac{1}{z}dz; v = z$
$\int \ln z dz = z\ln z - \int z\frac{1}{z}dz = z\ln z - \int dz = z\ln z - z + C.$
Comprobación $\frac{d}{dz}(z\ln z - z + C) = \ln z$
$2\int_{-2}^{-1} \ln|z|dz = 2\int_{1}^{2} \ln x dx = 2(z\ln z - z)|_1^2 = 2(2\ln 2 - 2 - (1\ln 1 - 1))_1^2 = 2(2\ln 2 - 2 + 1)$
$= 2(2\ln 2 - 1) = 0.77259$
Por tanto la respuesta es
$\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}} g(z)dz = 2(2\ln 2 - 1) + \frac{2}{3} + 1 - \sin(1).$

(**3**) Responder para la siguiente función

$$f(x) = 8x^3 - 6x - 2$$

(**3.1**) (**5**%). Dominio y rango
RESPUESTA
$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$. Porque se trata de un polinomio sobre los números reales.
$8x^3 - 6x - 2$



(3.2) (**5**%) Puntos criticos
RESPUESTA
$\frac{d}{dx}f(x) = 24x^2 - 6.$ Los puntos criticos se obtienen de
$24x^2 - 6 = 0; x = \pm\sqrt{\frac{6}{24}} = \pm\frac{1}{2} = 0.5.$
Son $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$
(3.3) (**5**%) Puntos máximos y mínimos
RESPUESTA

$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 48x.$

Como $48x_1 < 0$ el puntos critico x_1 es máximo.

Como $48x_2 > 0$ el puntos critico x_2 es mínimo.

(3.4) (**5**%) Zonas donde tenga inversa. Escriba dominio y rango de las funciones inversas.

RESPUESTA.

$\frac{d}{dx}f(x) = 24x^2 - 6 > 0$ en (∞, x_1), f es creciente. La inversa tiene el dominio $(\infty, x_1) = (\infty, -\frac{1}{2})$ y su rango es de $(-\infty, f(x_1)) = (-\infty, 0)$

$\frac{d}{dx}f(x) = 24x^2 - 6 < 0$ en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, f es decreciente. La inversa tiene el dominio $(x_1, x_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y su rango es de $(f(x_2), f(x_1)) = (-4, 0)$.

$\frac{d}{dx}f(x) = 24x^2 - 6 > 0$ en $(\frac{1}{2}, \infty)$, f es creciente. La inversa tiene el dominio $(x_2, \infty) = (\frac{1}{2}, \infty)$ y su rango es de $(f(x_2), \infty) = (-4, \infty)$.

(3.5) (**5**%) Zonas de concavidad y convexidad

RESPUESTA

$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 48x.$

Como $48x < 0$ con $x < 0$, es concava en $(-\infty, 0)$.

Como $48x > 0$ con $x > 0$, es convexa en $(0, \infty)$

(3.6) (**5**%) Puntos de inflexión.

RESPUESTA

Se obtiene de $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 48x = 0.$ Entonces $x_0 = 0$ es el punto de inflexión porque ademas $\frac{d^3}{dx^3}f(x_0) = 48 \neq 0.$

(3.7) (**10**%) Conociendo que $f(\frac{3}{2}) = 16$, justifique y calcule (explique, si se puede o no se puede)

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(16)$$

RESPUESTA.

Se tiene que $\frac{d}{dx}f(x) = 24x^2 - 6 > 0$ en $(\frac{1}{2}, \infty)$, f es creciente y tiene inversa. La inversa tiene el dominio $(x_2, \infty) = (\frac{1}{2}, \infty)$ y su rango es de $(f(x_2), \infty) = (-4, \infty)$. Se tiene $f(\frac{3}{2}) = 16$.

$\frac{d}{dx}f^{-1}(16) = \frac{1}{f'(f^{-1}(16))} = \frac{1}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{24\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6} = \frac{1}{48}$

(**4**) (**10**%) Calcular por una suma de Riemann de punto máximo en 3 intervalos iguales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$$

RESPUESTA.

La función sin es creciente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{6}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$\frac{\pi}{6}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1)^2\right) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{\pi}{24}(8) = \frac{1}{3}\pi.$