SEGUNDO EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Trimestre 11-P. Junio 2 de 2011.

Grupo: CTG11

SOLUCION

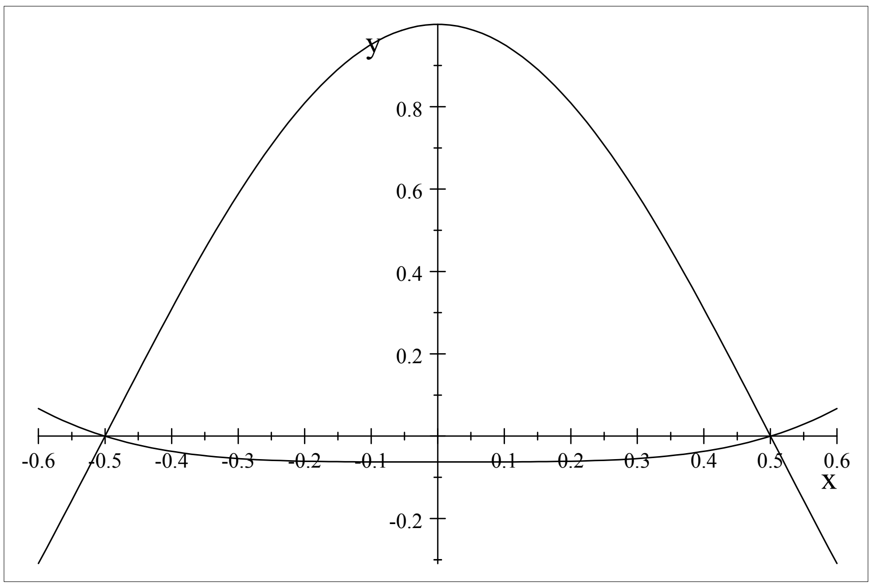
(**1**) [**20**]. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{16}$$

$$g(x) = \cos \pi x$$

en el intervalo donde ambas funciones se intersectan (Note que esto ocurre sobre el eje X).

RESPUESTA.



$2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\cos \pi x - \left(x^4 - \frac{1}{16}\right)\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^4 - \frac{1}{16}\right)dx = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{20} = 0.686\,62$

(**2**) [**20**]. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar, alrededor de la recta $y = 2,$ la región limitada por la función

$$f(x) = 8(x^3 - 2x^2),$$

en los puntos $x = 0$ y $x = 2.$

RESPUESTA.

$\int_0^2 \pi(2 - 8(x^3 - 2x^2))^2 dx = \pi\int_0^2 (64x^6 - 256x^5 + 256x^4 - 32x^3 + 64x^2 + 4)dx =$

$\pi\left(64\int_0^2 x^6 dx - 256\int_0^2 x^5 dx + 256\int_0^2 x^4 dx - 32\int_0^2 x^3 dx + 64\int_0^2 x^2 dx + 4\int_0^2 dx\right) =$

$\pi\left(\frac{8192}{7} - \frac{8192}{3} + \frac{8192}{5} - 128 + \frac{512}{3} + 8\right) = \frac{4504}{35}\pi \approx 404.28$

(**3**) [**20**] Calcule la longitud de arco en el intervalo $[0, \pi^2]$ de la curva "$y(t)$" descrita la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y = \sqrt{\cos \frac{t}{\pi}}\ .$$

RESPUESTA.

Usaremos la identidad $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$; $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\int_0^{\pi^2} \sqrt{1 + \left(\sqrt{\cos \frac{t}{\pi}}\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi^2} \sqrt{1 + \cos \frac{t}{\pi}}\, dt =$

$\int_0^{\pi^2} \sqrt{1 + 2\cos^2 \frac{t}{2\pi} - 1}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi^2} \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2\pi}}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi^2} \cos \frac{t}{2\pi} dt =$

$\sqrt{2} \int \cos \frac{t}{2\pi} dt =$

$\sqrt{2}\, 2\pi \sin \frac{1}{2\pi} t|_0^{\pi^2} = 2\sqrt{2}\,\pi(\sin \frac{1}{2\pi}\pi^2 - \sin 0) = 2\sqrt{2}\,\pi(\sin \frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}\,\pi(1) = 2\sqrt{2}\,\pi.$

(**4**) Calcule las siguientes integrales

1. a. [**20**]

$$\int e^{2z} \cos^2(z)\, \mathrm{d}z$$

RESPUESTA

$\int e^{2z} \cos^2(z) dz =$

$\int \cos^2(z) e^{2z} dz = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2z)) e^{2z} dz = \frac{1}{2} \int e^{2z} dz + \frac{1}{2} \int \cos(2z) e^{2z} dz =$

$\frac{1}{4} e^{2z} + \frac{1}{2} \int \cos(2z) e^{2z} dz = (A).$

Por partes la segunda integral: $u = \cos(2z); du = -2\sin(2z)dz; dv = e^{2z}dz; v = \frac{1}{2}e^{2z}$

$\int \cos(2z) e^{2z} dz = \cos(2z)\frac{1}{2}e^{2z} + \int \frac{2}{2} e^{2z} \sin(2z) dz = \cos(2z)\frac{1}{2}e^{2z} + \int \sin(2z) e^{2z} dz$

$u = \sin(2z); du = 2\cos(2z)dz; dv = e^{2z}dz; v = \frac{1}{2}e^{2z}$

$\cos(2z)\frac{1}{2}e^{2z} + \frac{1}{2}e^{2z}\sin(2z) - \int \frac{2}{2} e^{2z} \cos(2z) dz$

Se tiene

$\int \cos(2z) e^{2z} dz = \cos(2z)\frac{1}{2}e^{2z} + \frac{1}{2}e^{2z}\sin(2z) - \int \frac{2}{2} e^{2z} \cos(2z) dz$

Por tanto $\int \cos(2z) e^{2z} dz = \frac{1}{2}(\cos(2z)\frac{1}{2}e^{2z} + \frac{1}{2}e^{2z}\sin(2z))$

$(A) = \frac{1}{4}e^{2z} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\cos(2z)\frac{1}{2}e^{2z} + \frac{1}{2}e^{2z}\sin(2z)) = \frac{1}{4}e^{2z} + \frac{1}{8}e^{2z}(\cos(2z) + \sin(2z)) =$

$\frac{1}{8}e^{2z}(\cos 2z + \sin 2z + 2) + C$

b. [**20**]

$$\int \tan(2\pi x) \sec^2(2\pi x) \sin^2(2\pi x) \cos^4(2\pi x)\, \mathrm{d}x.$$

RESPUESTA.

$\int \tan(2\pi x) \sec^2(2\pi x) \sin^2(2\pi x) \cos^4(2\pi x) dx = \int \sin^3(2\pi x) \cos(2\pi x) dx$

$u = \sin(2\pi x); du = 2\pi \cos(2\pi x) dx$

$= \frac{1}{2\pi} \int u^3 du = \frac{1}{8\pi} u^4 + C = \frac{1}{8\pi} \sin^4(2\pi x) + C$