EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Grupo: CTG11

SOLUCION

(**1**) [**20**]. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$f(x) = -x^2 + 1$$
$$g(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2})$$

en el intervalo $[-1, 1]$ que es donde ambas funciones se intersectan sobre el eje X).

RESPUESTA

$\int_{-1}^{1}(-x^2 + 1 - \sin(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}))dx = 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{\pi}\sin\frac{1}{2}\pi x\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{\pi}\right) =$
$2\left(\frac{2}{3} + +\frac{2}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3\pi}(\pi + 3) \approx 2.606 =$

(**2**) [**20**]. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar, alrededor del Eje Y, la región limitada por la función

$$f(x) = -2x^2 + 2,$$

en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

RESPUESTA.

Sea $y = -2x^2 + 2$, se tiene que $x = \sqrt{\frac{2-y}{2}} = \sqrt{1 - \frac{y}{2}}$

con $x = 0, y = 2$, con $x = 1$, se tiene $y = 0$

$\int_0^2 \pi\left(\sqrt{1 - \frac{y}{2}}\right)^2 dy = \pi\int_0^2(1 - \frac{y}{2})dy = \pi\int_0^2 dy - \frac{\pi}{2}\int_0^2 ydy = \pi y|_0^2 - \frac{\pi}{4}y^2|_0^2$
$2\pi - \frac{\pi}{4}4 = \pi.$

(**3**) [**20**] Calcule la longitud de arco en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la curva "$y(x)$" descrita la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}y = \sqrt{\cos 2x}.$$

RESPUESTA. Usando $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\sqrt{\cos 2x}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x}\, dx =$
$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sqrt{2}\, \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}.$

(**4**) Calcule las siguientes integrales

1. a. [**20**]

$$\int z^2 e^{2z}\, \mathrm{d}z$$

b. [**20**]

$$\int \tan^2(\pi x)\cos^3(\pi x)\, \mathrm{d}x.$$

RESPUESTA

4.a

$\int z^2 e^{2z} dz = \frac{1}{2}z^2 e^{2z} - \frac{1}{2}ze^{2z} + \frac{1}{4}e^{2z} + C = \frac{1}{4}e^{2z}(2z^2 - 2z + 1) + C$

Verificacion

$\frac{d}{dz}(\frac{1}{4}e^{2z}(2z^2 - 2z + 1) + C) = z^2 e^{2z}.$

4.b

$\int \tan^2(\pi x)\cos^3(\pi x) = \int \sin^2(\pi x)\cos(\pi x)dx = \frac{1}{3\pi}\sin^3(\pi x) + C$

Otra solución

$-\frac{1}{12\pi}(\sin 3\pi x - 3\sin \pi x) + C$

Verificación

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3\pi}\sin^3(\pi x)\right) = \frac{3}{3\pi}\sin^2(\pi x)\cos(\pi x)\pi = \cos(\pi x)\sin^2(\pi x)$