3er EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

SOLUCION

1. (**25** %) Resuelva por integración por partes la integral

$$\int x\sin(\pi - x)dx$$

RESPUESTA

Se puede usar la identidad $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\int x\sin(\pi - x)dx = \int x\sin(x)dx$

$u = x; du = dx; dv = \sin(x)dx; v = -\cos(x)$

$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

Verificación: $\frac{d}{dx}(-x\cos(x) + \sin(x) + C) = x\sin x$

O directamente

$u = x; du = dx; dv = \sin(\pi - x)dx; v = \cos(\pi - x)$

$\int x\sin(\pi - x)dx = x\cos(\pi - x) - \int \cos(\pi - x)dx = x\cos(\pi - x) + \sin(\pi - x) + C$

Verificación: $\frac{d}{dx}(x\cos(\pi - x) + \sin(\pi - x) + C) = x\sin(x) = x\sin(\pi - x)$

2. (**25** %) Calcule la integral por fracciones parciales

$$\int \frac{7x^2 + 16}{(x-4)(x^2 + 4x)}dx$$

RESPUESTA.

Se factoriza el divisor y se proponen las fracciones

$\frac{7x^2+16}{(x-4)(x^2+4x)} = \frac{7x^2+16}{(x-4)x(x+4)} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x+4)}$

Se tiene

$7x^2 + 16 = Ax(x+4) + B(x-4)(x+4) + Cx(x-4) =$

$Ax^2 - 16B + Bx^2 + Cx^2 + 4Ax - 4Cx$

Se tiene

$7x^2 + 16 = x^2(A + B + C) + x(4A - 4C) - 16B$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones para A, B, C

$(A + B + C) = 7$

$(4A - 4C) = 0$

$-16B = 16$

De donde $B = -1$

$A = C$ y sustityendo en la primera A y B

$C - 1 + C = 7; 2C = 8; C = 4$ y por tanto $A = 4$.

Verificación: $\frac{4}{(x-4)} - \frac{1}{x} + \frac{4}{(x+4)} = \frac{7x^2+16}{x(x-4)(x+4)}$

$\int \frac{7x^2+16}{(x-4)x(x+4)}dx = \int\left(\frac{4}{(x-4)} - \frac{1}{x} + \frac{4}{(x+4)}\right)dx = 4\int \frac{1}{(x-4)}dx - \int \frac{1}{x}dx + 4\int \frac{1}{(x+4)}dx =$

$4\ln(x-4) - \ln(x) + 4\ln(x+4) + C$

Verificación: $\frac{d}{dx}(4\ln(x-4) - \ln(x) + 4\ln(x+4) + C) = \frac{7x^2+16}{x(x-4)(x+4)}$

3. (**25** %) Encuentre la siguiente integral impropia

$$\int_0^{\sqrt{8}} \frac{x}{(8 - x^2)^{\frac{1}{3}}}dx$$

RESPUESTA.

$\int_0^{\sqrt{8}} \frac{x}{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{b\to\sqrt{8}} \int_0^b \frac{x}{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}} dx$

Se calcula $\int \frac{x}{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}} dx; u = 8 - x^2; du = -2xdx$

$\int \frac{x}{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}} dx = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{3}} du = -\frac{1}{2} \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{4} (8 - x^2)^{\frac{2}{3}}$

$\lim_{b\to\sqrt{8}} \int_0^b \frac{x}{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{b\to\sqrt{8}} \left[-\frac{3}{4} (8 - x^2)^{\frac{2}{3}} \right]_0^b =$

$\lim_{b\to\sqrt{8}} - \frac{3}{4} (8 - b^2)^{\frac{2}{3}} - \left[-\frac{3}{4} (8 - 0^2)^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{3}{4} (8)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \left(8^{\frac{1}{3}} \right)^2 = \frac{3}{4} (2)^2 = 3$

4. (**25** %) Calcule por la serie de Taylor con $x = 0$ (o sea, por la Serie de Maclaurín) la integral con 5 terminos.

$$\int_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx$$

RESPUESTA.

Termino		$y = 0$
0	$\cos y$	1
1	$\frac{d}{dy} \cos y = -\sin y$	0
2	$\frac{d^2}{dy^2} \cos y = -\cos y$	-1
3	$\frac{d^3}{dy^3} \cos y = \sin y$	0
4	$\frac{d^4}{dy^4} \cos y = \cos y$	1

La serie de $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Y $\cos(x^2) \approx 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}$.

$\int_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx \approx \int_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} \right) dx = \int_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{24} \right) dx =$

$\int_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} x^2 dx + \frac{1}{24} \int_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} x^6 dx =$

$-\frac{1}{x} \Big|_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} - \frac{1}{6} x^3 \Big|_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} + \frac{1}{24(7)} x^7 \Big|_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} \approx -\frac{1}{x} \Big|_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} = 990$

O con mayor precisión

$\int_{\frac{1}{1000}}^{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{24} \right) dx \approx 989.999833334$