

De los acoplamientos perfectos al teorema de los cuatro colores

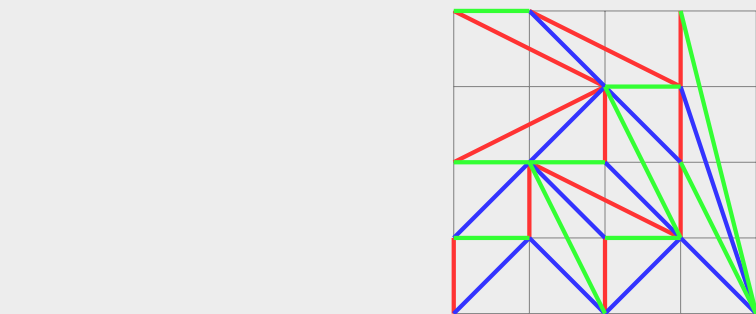
Gloria Aguilar (Cinvestav), David Flores (UNAM), Sergio Pérez (UAMA),
Francisco Santos (Cantabria), Francisco Zaragoza (UAMA)

Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco
Departamento de Sistemas



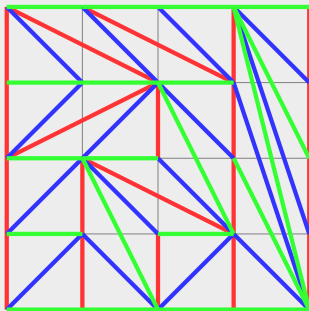
21 de mayo de 2025, Ixtapan de la Sal, México

Una *triangulación unimodular* T de un polígono P con vértices de coordenadas enteras es una partición de P en *triángulos unimodulares*. Equivalentemente, en triángulos con vértices de coordenadas enteras y área un medio.



Acoplamiento perfecto

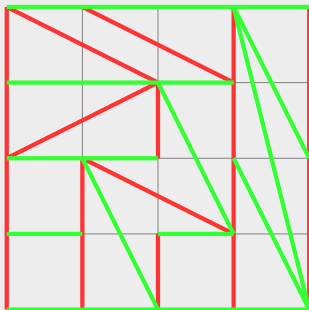
Un caso especial interesante es cuando el polígono es un rectángulo. En este caso, el *dual débil* de cualquier triangulación unimodular tiene un *acoplamiento perfecto*.
¡Simplemente hay que escoger el color correcto!



Triangulaciones unimodulares de rectángulos

Acoplamientos perfectos

Un caso especial interesante es cuando el polígono es un rectángulo. En este caso, el *dual débil* de cualquier triangulación unimodular tiene un *acoplamiento perfecto*.
¡Simplemente hay que escoger el color correcto!



Preguntas abiertas

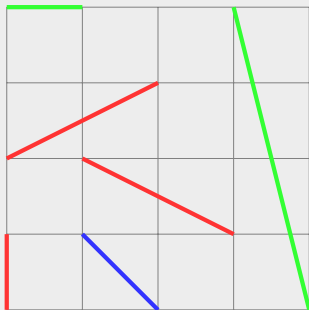
Dado un polígono con vértices enteros, ¿cuál es el tamaño máximo de un acoplamiento del dual débil tomado entre todas sus triangulaciones unimodulares?



¿Habrá alguna caracterización **bonita** de las gráficas que son duales débiles de triangulaciones unimodulares de polígonos?

Segmentos primitivos

Sean $p = (a, b)$ y $q = (c, d)$ dos puntos con coordenadas enteras. El segmento pq es **primitivo** si no contiene ningún otro punto de coordenadas enteras. Equivalentemente, si $\text{mcd}(a - c, b - d) = 1$.



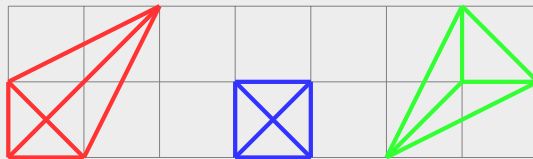
Dibujos y encajes primitivos

Dibujo primitivo

Un **dibujo** de una gráfica es **primitivo** si todos sus vértices son distintos y todas sus aristas son segmentos primitivos.

Encaje primitivo

Un **encaje** de una gráfica es **primitivo** si todos sus vértices son distintos y todas sus aristas son segmentos primitivos.



Tres dibujos de K_4 .

Caracterización de dibujos primitivos

Teorema (Flores, Z, 2009)

Una gráfica G tiene un dibujo primitivo si y solo si $\chi(G) \leq 4$.

Bosquejo de la prueba

($\Rightarrow$) Suponga que G tiene un dibujo primitivo. Considere la coloración de los vértices de G dada por

$$f(a, b) = (a \bmod 2, b \bmod 2).$$

Suponga que los extremos de la arista pq (con $p = (a, b)$ y $q = (c, d)$) reciben el mismo color. Entonces $a + c$ y $b + d$ son pares y, por lo tanto, el punto medio

$$r = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + d}{2} \right)$$

tiene coordenadas enteras, una contradicción. (Kára, Pór, Wood, 2005)

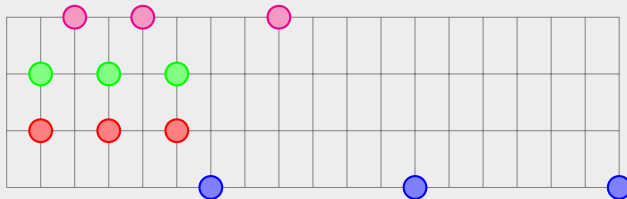
Construcción de dibujos primitivos

Bosquejo de la prueba

($\Leftarrow$) La gráfica $K_{n,n,n,n}$ se puede dibujar de forma primitiva con los vértices:

- ▶ $P_0 = \{(6i, 0) : 1 \leq i \leq n\}$,
- ▶ $P_1 = \{(2i - 1, 1) : 1 \leq i \leq n\}$,
- ▶ $P_2 = \{(2i - 1, 2) : 1 \leq i \leq n\}$ y
- ▶ $P_3 = \{(a_i, 3) : 1 \leq i \leq n\}$,

donde $\{a_1, \dots, a_n\}$ es el conjunto de los n pares más pequeños que no son múltiplos de 3.



Encajes primitivos

Los encajes primitivos son:

- ▶ Gráficas planas.
- ▶ Dibujos primitivos.
- ▶ Coloreables con 4 colores.

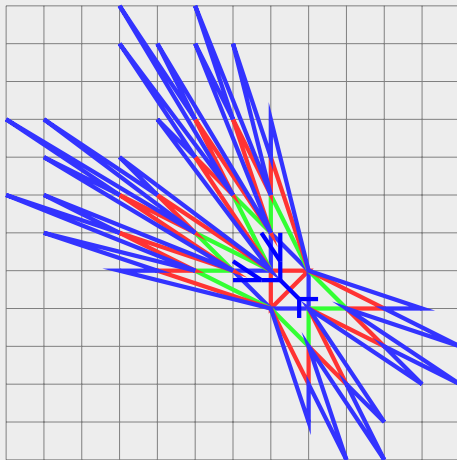
Pregunta

¿Cuáles gráficas planas tienen encajes primitivos?

Gráficas periplanas

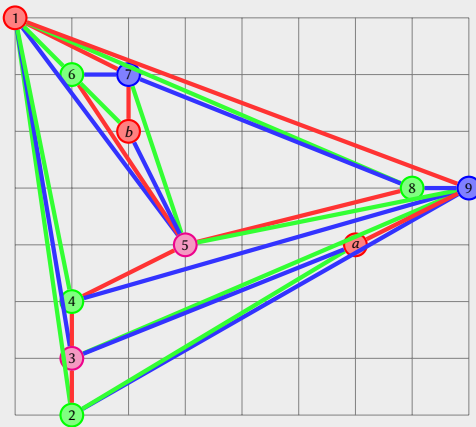
Encajes periplanos

Construcción recursiva (Aguilar, Z, 2010). También (Nakamoto y Negami, 2010).



Triangulaciones pequeñas

Toda triangulación aplanable con $n \leq 13$ tiene un encaje primitivo en un cuadrado de lado n (Pérez, Z, 2011).



Resultado principal

Teorema (Santos, Flores, Z, 2012)

Toda gráfica aplanable tiene un encaje primitivo.¹

Equivalentemente

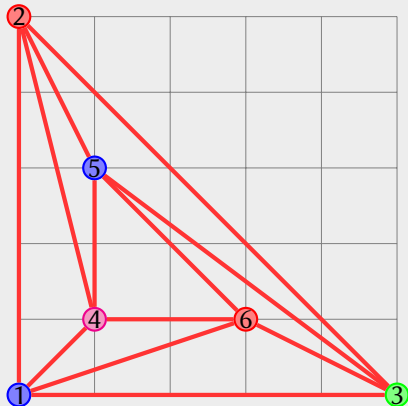
Las gráficas aplanables tienen encajes primitivos si y solo si el teorema de los cuatro colores.

¹Este resultado fue obtenido independientemente por Martin Balko, quien lo presentó en EuroCG 2012.

Esbozo de la prueba

Teorema de los cuatro colores

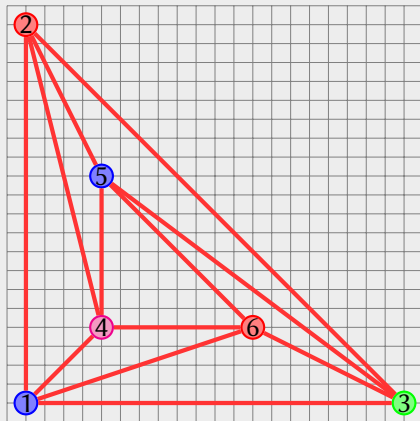
Sea G una gráfica aplanable, coloreada con 4 colores, y considere cualquiera de sus encajes rectilíneos con vértices de coordenadas enteras.



Esbozo de la prueba

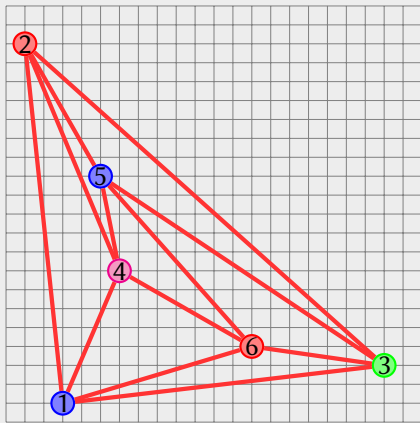
Agrandando el encaje

Multiplique las coordenadas del encaje por un entero suficientemente grande.



Perturbando el encaje

Movamos los vértices **un poco** para satisfacer ciertas restricciones (sin cambiar el encaje).



Clases de color $(2a, 6i)$ $(2c, 2d + 1)$ $(2e + 1, 2f)$ $(2g + 1, 6j + 1)$

Esbozo de la prueba

Restricciones técnicas

Las coordenadas deben satisfacer las restricciones técnicas:

- 1 El encaje topológico se conserva.
- 2 No hay dos vértices en el mismo renglón o columna.
- 3 Cada vértice debe ir a su [clase de color](#).
- 4 Los vértices $(2a, 2b)$ deben cumplir $b = 3i$.
- 5 Los vertices $(2c, 2d + 1)$ son libres.
- 6 Los vértices $(2e + 1, 2f)$ son libres.
- 7 Los vértices $(2g + 1, 2h + 1)$ deben cumplir $h = 3j$.

Esbozo de la prueba

Expansión horizontal

Suponga que el encaje tiene altura m . Entonces multiplique todas las coordenadas horizontales por $M = m!$ y ajústelas un poco como sigue:

- 1 $(2a, 6i)$ va a $(2aM, 6i)$.
- 2 $(2c, 2d + 1)$ va a $(2cM + 2, 2d + 1)$.
- 3 $(2e + 1, 2f)$ va a $((2e + 1)M + 1, 2f)$.
- 4 $(2g + 1, 6j + 1)$ va a $((2g + 1)M + 3, 6j + 1)$.

Fin de la prueba

Ahora basta verificar que todas las aristas son segmentos primitivos.

Tamaño del encaje

Primero

Se comenzamos con el encaje de Schnyder (en un cuadrado de lado n), entonces $m \in O(n^2)$ y el encaje cabe en un rectángulo de

$$m \times m \cdot m! \approx m 2^{m \log m}.$$

Segundo

En la última parte de la prueba es suficiente multiplicar por $\text{mcm}(1, 2, \dots, m)$. Usando el [teorema de los números primos](#) ($\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$) se puede verificar que el rectángulo es

$$m \times m 2^m.$$

Más preguntas abiertas

Árboles

Caben en un cuadrado de lado n y necesitan al menos un cuadrado de lado $\sqrt{n}$. ¿Cuál es el lado correcto?

Gráficas periplanas

Caben en un cuadrado de lado $O(2^n)$ y necesitan $\Omega(\sqrt{n})$. ¿Cuál es el lado correcto? ¿Y qué pasa si requerimos que la cara externa sea convexa? Se necesita al menos $\Omega(n\sqrt{n})$.

Aplanables

¿Habrán encajes de tamaño polinomial? Para $n \leq 13$ se requiere lado menor a n .

Algoritmos

¿Qué tan rápido se pueden encontrar encajes primitivos pequeños?

¡Gracias por su atención!



Posgrado en Optimización