Problemas, algoritmos y optimización

Francisco Javier Zaragoza Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Área de Optimización Combinatoria
Departamento de Sistemas

3 a 7 de septiembre de 2012

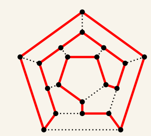
Problema del ciclo hamiltoniano

Ciclo hamiltoniano

Un ciclo que pasa exactamente una vez por cada vértice de una gráfica.

Hamiltonian

Dada una gráfica G ¿tiene un ciclo hamiltoniano?



Problemas de optimización

Soluciones óptimas

En un problema de optimización se desea obtener las mejores soluciones de cada instancia. Cada instancia $i \in \mathcal{I}$ incluye una función objetivo f_i de su conjunto de soluciones $\mathcal{S}_i$ a un conjunto con un orden total (usualmente los reales) y se desea obtener el menor valor posible de $f_i(s)$ con $s \in \mathcal{S}_i$.

Observaciones

A los elementos de $\mathcal{S}_i$ se les llama soluciones factibles para i. A cualquier $s \in \mathcal{S}_i$ que minimice el valor de $f_i(s)$ se le llama solución óptima. No todos los problemas de optimización tienen soluciones óptimas o factibles.

Hamiltonicidad

Max Camino

Dada una gráfica $G = (V, E)$ encontrar la longitud máxima de un camino simple es aproximable con garantía $\frac{\log |V|}{|V|}$ pero no está en APX[a].

[a] Alon, Yuster, Zwick, *Color-coding: a new method for finding simple paths, cycles and other small subgraphs within large graphs*, Proc. 26th Ann. ACM Symp. on Theory of Comp., ACM, 326-335, 1994.

Agente viajero

Dada una gráfica completa $G = (V, E)$ con costos en las aristas encontrar la longitud mínima de un ciclo hamiltoniano es NPO completo, aunque es aproximable con garantía $\frac{3}{2}$ si los costos son métricos[a].

[a] Christofides, *Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem*, TR 388, Carnegie-Mellon University, 1976.

Agente viajero con costos generales

Agente viajero

Dada una gráfica completa $G = (V, E)$ con costos no negativos en las aristas, encontrar la longitud mínima de un ciclo hamiltoniano no se puede aproximar en tiempo polinomial (a menos que P=NP).

Idea de la demostración

Si se pudiera aproximar con cualquier garantía $\alpha = \alpha(|V|) \geq 1$ entonces se podría resolver el problema del ciclo hamiltoniano en tiempo polinomial.

Reducción

Sea $H = (V, F)$ una gráfica cualquiera. Sea $G = (V, E)$ una gráfica completa con costos en las aristas $c_e = 1$ si $e \in F$ y $c_e = \alpha|V|$ si $e \notin F$.

Agente viajero con costos generales

Observaciones sobre ciclos hamiltonianos

- Un ciclo hamiltoniano de G tiene costo $|V|$ si sólo usa aristas de H y tiene costo $\geq \alpha|V| + |V| - 1$ en caso contrario.
- Si H es hamiltoniana, el costo mínimo es $|V|$ y si no lo es el costo mínimo es $\geq \alpha|V| + |V| - 1$.

Contradicción

Si el supuesto algoritmo de aproximación existiera, entonces generaría un ciclo hamiltoniano de G de costo $\leq \alpha|V|$ cuando H es hamiltoniana y de costo $\geq \alpha|V| + |V| - 1$ en caso contrario.

Agente viajero con costos métricos

Agente viajero métrico

Dada una gráfica completa $G = (V, E)$ con costos *métricos* en las aristas, encontrar la longitud mínima de un ciclo hamiltoniano se puede aproximar en tiempo polinomial con garantía $\frac{3}{2}$.

Costos métricos

Si $u, v, w \in V$ entonces $c_{uv} + c_{vw} \geq c_{uw}$.

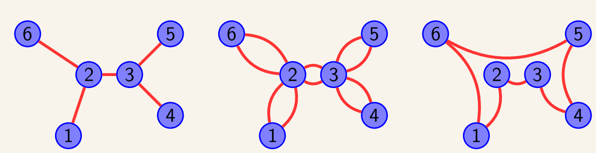
Simplificación

Vamos a presentar un algoritmo de aproximación con garantía 2, que resulta de una simplificación del algoritmo de Christofides.

Algoritmo simplificado

Entrada G y c

- Construye un árbol abarcador T de costo mínimo en (G, c).
- Duplica todas las aristas de T para obtener una gráfica $2T$.
- Encuentra un circuito euleriano C de $2T$.
- Convierte C en un circuito hamiltoniano H de G *saltando* vértices.



Garantía de aproximación

Demostración

Sea H^* un circuito hamiltoniano de costo mínimo de (G, c). Como H^* contiene un *árbol abarcador* se tiene que

$$c(T) \leq c(H^*).$$

Por la condición métrica $c(H) \leq c(2T)$ y entonces se cumple que

$$c(H^*) \leq c(H) \leq c(2T) = 2c(T) \leq 2c(H^*).$$

Christofides

Se completa T a una gráfica euleriana de forma óptima.