Inducción matemática

- La inducción matemática es una técnica de demostración que se puede aplicar a muchos tipos de problemas.
- Para demostrar que una cierta propiedad se cumple para todo natural n se deben probar dos cosas:
  - Que la propiedad se cumple para $n = 1$.
  - Para toda $n \geq 1$, si la propiedad se cumple para n entonces también se cumple para $n+1$.
- A esto se le llama el caso base y el caso inductivo.

Alternativas

- El caso base puede cambiar:
  - La propiedad se cumple para $n = 3$.
  - Para toda $n \geq 3$, si la propiedad se cumple para n entonces también se cumple para $n+1$.
- Puede haber varios casos base:
  - La propiedad se cumple para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$.
  - Para toda $n \geq 3$, si la propiedad se cumple para n entonces también se cumple para $n+1$.
- El caso inductivo puede cambiar:
  - La propiedad se cumple para $n = 1$.
  - Para toda $n \geq 1$, si la propiedad se cumple para toda $1 \leq m \leq n$ entonces también se cumple para $n+1$.

Primer ejemplo de inducción

- Demuestre que $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ para toda $n \geq 1$.
- Primero para $n = 1$: el lado izquierdo es igual a 1, el lado derecho es igual a $1(1+1)/2$ y son iguales.
- Ahora suponga que $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ para alguna $n \geq 1$. Entonces el lado izquierdo es:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= n(n+1)/2 + (n+1) \\ &= (n+1)(n/2+1) \\ &= (n+1)(n+2)/2. \end{aligned}$$

- Que es igual al lado derecho correspondiente.

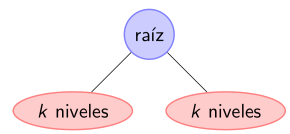
Segundo ejemplo de inducción

- Demuestre que si $1 + x > 0$ entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para toda $n \geq 1$.
- Para $n = 1$ notamos que ambos lados son iguales.
- Ahora suponga que $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para alguna $n \geq 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

- Que es lo que queríamos demostrar.

Árboles binarios completos



- Demuestre que un árbol binario completo con k niveles tiene exactamente $2^k - 1$ nodos.
- Para empezar, observe que un árbol binario completo con 1 nivel tiene exactamente $1 = 2^1 - 1$ nodo.
- Para terminar, observe que un árbol binario completo con $k+1$ niveles consiste de la raíz y dos árboles binarios completos con k niveles.
- Por lo tanto tiene $1 + 2(2^k - 1) = 2^{k+1} - 1$ nodos.

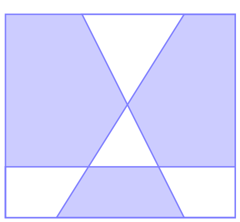
Un ejemplo de una desigualdad

- Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < 1$ para toda $n \geq 1$.
- Para $n = 1$ el lado izquierdo vale $\frac{1}{2} < 1$.
- Ahora suponga que el enunciado es cierto para n, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

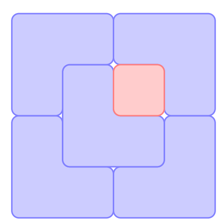
- Que es lo que queríamos demostrar.

Un ejemplo geométrico



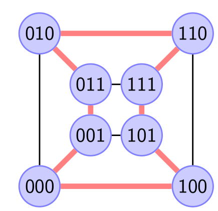
- Demuestre que cualquier conjunto de regiones definidas por n rectas en el plano se puede colorear con sólo dos colores de modo que no existan dos regiones del mismo color que compartan una arista.

Un ejemplo de rompecabezas



- Un trominó es una figura en forma de L formada por la yuxtaposición de tres cuadrados unitarios.
- Demuestre que se puede tapizar con trominós cualquier cuadrícula de $2^n \times 2^n$ a la que le falta un cuadrito en una posición arbitraria.
- ¿Qué puede decir de las cuadrículas de $n \times n$?

Un ejemplo combinatorio



- Un código Gray es una secuencia circular de los 2^n distintos números binarios de n bits de modo que cada pareja de números consecutivos difiere exactamente en un bit.
- Demuestre que existen códigos Gray para toda $n \geq 1$.