Métodos de punto interior

Método de Dikin

Francisco Javier Zaragoza Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Departamento de Sistemas

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Posgrado en Optimización

26 de enero de 2021

A diferencia del método simplex, que produce soluciones en la frontera de la región factible, los métodos de punto interior producen soluciones en el interior de la región factible. Así como hay muchas variantes del método simplex, también hay muchas variantes entre los métodos de punto interior:

Método convexo de Von Neumann Históricamente el primero (1948).

Método afín de Dikin Optimiza sobre un elipsoide interior (1967).

Método elipsoidal de Khachiyan El primero polinomial (1979).

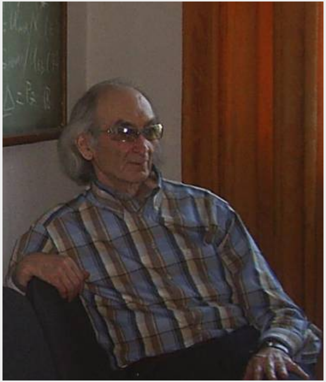
Método proyectivo de Karmarkar Reducción de potencial (1984).

Métodos de camino central Con barreras logarítmicas (1986).

Ilya Iosifovich Dikin

1936 — 2008

- El matemático soviético I. I. Dikin trabajó en el Instituto de Sistemas Energéticos de la Academia Rusa de Ciencias (entonces, Instituto de Energía Siberiano de la Academia de Ciencias de la URSS).
- Propuso su método afín en 1967 y una prueba de convergencia en 1974. Su trabajo permaneció desconocido en el occidente al menos hasta mediados de los 80s. Tanto así, que su resultado fué *redescubierto* varias veces por otros (Barnes en 1986, Vanderbei et al. en 1986). Este redescubrimiento fué reconocido en el occidente poco después (Bayer y Lagarias en 1989, Vanderbei y Lagarias en 1990).



Programas lineales primal y dual

Considera el programa lineal primal con n variables y m restricciones

$$\begin{aligned} \min z &= c^\top x, && (1)\\ \mathbf{A}x &= b, && (2)\\ x &\geq \mathbf{0} && (3) \end{aligned}$$

y su programa lineal dual

$$\begin{aligned} \max v &= b^\top y, && (4)\\ \mathbf{A}^\top y + u &= c, && (5)\\ u &\geq \mathbf{0}. && (6) \end{aligned}$$

Sean x, y, u vectores de las dimensiones correctas.

Solución (arbitraria) Primal si $\mathbf{A}x = b$. Dual si $\mathbf{A}^\top y + u = c$.

Solución factible Primal si $x \geq \mathbf{0}$. Dual si $u \geq \mathbf{0}$.

Solución básica Sea B, N una partición de las columnas de $\mathbf{A}$ con $|B| = n$. Primal si $x_N = \mathbf{0}$, no degenerada si $x_B > \mathbf{0}$. Dual si $u_B = \mathbf{0}$, no degenerada si $u_N > \mathbf{0}$.

Solución interior Primal si $x > \mathbf{0}$. Dual si $u > \mathbf{0}$.

Solución óptima Primal si x es factible y minimiza $c^\top x$. Dual si (y, u) es factible y maximiza $b^\top y$.

Teorema

Sean x^* y (y^*, u^*) soluciones factibles del primal y del dual, respectivamente. Entonces x^* y (y^*, u^*) son soluciones óptimas si y solo si $u_j^* x_j^* = 0$ para toda $1 \leq j \leq n$.

Definamos la matriz $\mathbf{D}$ como la matriz diagonal

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ u_i & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{7}$$

Observa que ahora $\mathbf{D}x = \mathbf{0}$ es una forma equivalente de escribir las condiciones de holguras complementarias.

Elipsoides

Una matriz cuadrada $\mathbf{M}$ es positiva definida si $y^\top \mathbf{M} y > 0$ para toda $y \neq \mathbf{0}$ (es positiva semidefinida si $y^\top \mathbf{M} y \geq 0$ para toda y). Si $\mathbf{M}$ es positiva definida y $r > 0$, entonces

$$\{y \mid (y - y^0)^\top \mathbf{M}(y - y^0) \leq r^2\} \tag{8}$$

es un elipsoide con centro en y^0. En particular, si $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$, entonces

$$\{y \mid \|\mathbf{A}^\top (y - y^0)\| \leq r\} \tag{9}$$

define el mismo elipsoide.

Método de Dikin

Este método generará una sucesión de soluciones duales interiores $(y^0, u^0), (y^1, u^1), \ldots$ de modo que eventualmente converja a una solución dual óptima.

Inicialización Solución dual interior y^0, u^0.

Cálculo de la dirección Se busca una dirección p de mejora.

Solución primal Se determina una solución primal x^k.

Nueva solución dual Se calculan nuevas y^{k+1} y u^{k+1}.

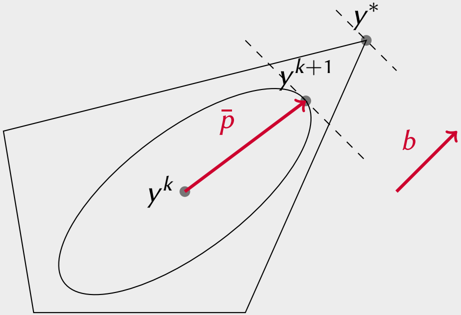
Convergencia Se prueba si se tiene la tolerancia deseada ϵ.

Método de Dikin

Idea general

Cada iteración k del método de Dikin comienza con una solución dual interior y^k y busca una nueva solución dual interior y^{k+1} que maximiza $b^\top y$ en el elipsoide

$$\mathcal{E} = \{y \mid \|\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^\top(y - y^k)\| \leq 1\}. \tag{10}$$



Método de Dikin

Suposiciones

Una prueba simplificada de convergencia requiere las siguientes suposiciones:

S1 $b \neq \mathbf{0}$, $c \neq \mathbf{0}$, $n > m$ y cualquier subconjunto B de m columnas de $\mathbf{A}$ tiene rango m (es decir, cualquier B es una base).

S2 Ya se tiene dada una solución dual interior y^0, u^0 (inicialización).

S3 Existe una solución primal factible (pero no se tiene dada).

S4 Toda solución dual factible básica es no degenerada.

S5 Toda solución primal básica (factible o no) es no degenerada.

Cálculo de la dirección

Considere la dirección $p = (\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^{\top})^{-1}b$.

- $\mathbf{D}^{-1}$ y $\mathbf{D}^{-2}$ existen ya que la diagonal de $\mathbf{D}$ es positiva pues $u^k > 0$ es interior.
- $(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^{\top})^{-1}$ existe y es positiva definida. Esto se debe a que tanto $\mathbf{A}$ como $\mathbf{D}^{-1}$ tienen rango m, por lo que $\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^{\top}$ es simétrica y positiva definida de rango m, lo que implica que tiene inversa.

Considere la solución primal $x^k = \mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^\top p$. Para ver que sí es solución, note que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}x^k &= \mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^\top p && (11)\\
&= (\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^\top)(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^\top)^{-1} b && (12)\\
&= b. && (13)
\end{aligned}
$$

Método de Dikin

Nueva solución dual

Considere $\bar{p} = |(b^\top p)^{-1/2}|p$, $y^{k+1} = y^k + \bar{p}$ y $u^{k+1} = c - \mathbf{A}^\top y^{k+1}$.

- Como $x^k \neq \mathbf{0}$ (ya que $x^k = \mathbf{0} \Rightarrow b = \mathbf{0}$), se tiene que $\mathbf{D}x^k \neq \mathbf{0}$ y $\|\mathbf{D}x^k\| > 0$.
- El escalar $|(b^\top p)^{-1/2}|$ es positivo, ya que:

$$\begin{aligned} b^\top p &= b^\top(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^\top)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^\top)p && (14)\\ &= p^\top(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^\top)p && (15)\\ &= (p^\top\mathbf{A}\mathbf{D}^{-2})\mathbf{D}^2(\mathbf{D}^{-2}\mathbf{A}^\top p) && (16)\\ &= (x^k)^\top\mathbf{D}^2x^k && (17)\\ &= \|\mathbf{D}x^k\|^2 > 0. && (18)\end{aligned}$$

- Entonces $\bar{p}$ es una dirección de mejora ya que

$$b^\top y^{k+1} - b^\top y^k = |(b^\top p)^{1/2}| = \|\mathbf{D}x^k\| > 0. \qquad (19)$$

Para finalizar la prueba de que este paso es legal, se necesita probar lo siguiente:

Lema (Cota dual)

Para toda k se cumple que $\mathbf{0} < u^{k+1} \leq 2u^k$.

Lema (Elipsoide interior)

El elipsoide $\mathcal{E}$ se encuentra estrictamente en el interior de la región dual factible.

Si $\|y^{k+1} - y^k\| \leq \epsilon$, entonces se reportan x^k y (y^{k+1}, u^{k+1}) como *óptimas.*

Teorema (Razón de convergencia)

El valor $v_k = b^\top y^k$ de la función objetivo dual converge al valor óptimo $v^* = b^\top y^*$ con una razón de convergencia

$$\rho_k = \frac{v^* - v^{k+1}}{v^* - v^k} \tag{20}$$

que es asintóticamente $\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Método de Dikin

Observaciones

- El método propuesto por Dikin avanza hasta la frontera del elipsoide $\mathcal{E}$. Otros métodos relacionados avanzan un múltiplo $\alpha > 0$ de esa distancia.
- Evitamos dar la prueba de convergencia, la cual es compleja aún bajo las muy restrictivas suposiciones que hicimos.
- No se cree que este método converja en una cantidad polinomial de iteraciones.
- Es un problema abierto si este método converge con degeneración primal.

Cada ejercicio vale 1 punto.

1. Demuestra que si **A** y **B** son positivas definidas, también lo es $\mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{B}\mathbf{A}$.
2. Demuestra que $y^{k+1} = y^k + \bar{p}$ está en la frontera del elipsoide $\mathcal{E}$.
3. Demuestra que $y^{k+1} = y^k + \bar{p}$ maximiza $b^\top y$ sobre el elipsoide $\mathcal{E}$.
4. Demuestra el lema de la cota dual.

Referencias

G. B. Dantzig and M. N. Thapa.
Linear Programming 2: Theory and Extensions.
Springer-Verlag New York, 2003.

O. Popova.
Obituary: Ilya I. Dikin (1936—2008), 2008, en línea, visitado el 26 de enero de 2021.
https://camo.ici.ro/journal/vol10/dikin.htm.

R. J. Vanderbei and J. C. Lagarias.
I. I. Dikin's convergence result for the affine–scaling algorithm.
In J. C. Lagarias and M. J. Todd, editors, *Mathematical Developments Arising from Linear Programming*, volume 114 of *Contemporary Mathematics*, pages 109–119.
American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1990.