Métodos de punto interior

Método de Karmarkar

Francisco Javier Zaragoza Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Departamento de Sistemas

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Posgrado en Optimización

5 de febrero de 2021

A diferencia del método simplex, que produce soluciones en la frontera de la región factible, los métodos de punto interior producen soluciones en el interior de la región factible. Así como hay muchas variantes del método simplex, también hay muchas variantes entre los métodos de punto interior:

Método convexo de Von Neumann Históricamente el primero (1948).

Método afín de Dikin Optimiza sobre un elipsoide interior (1967).

Método elipsoidal de Khachiyan El primero polinomial (1979).

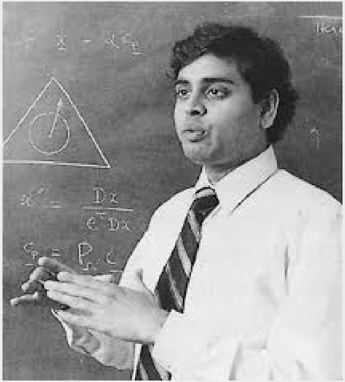
Método proyectivo de Karmarkar Reducción de potencial (1984).

Métodos de camino central Con barreras logarítmicas (1986).

Narendra Krishna Karmarkar

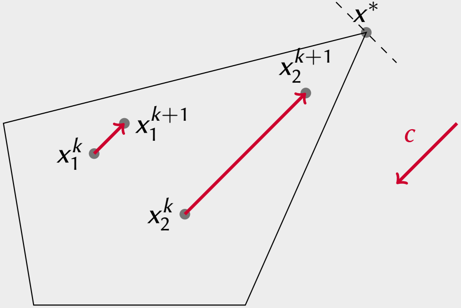
Gwalior 1955 —

- El científico de la computación indio N. Karmarkar trabajó en IBM Research, en AT&T Bell Laboratories, en el MIT, en la Universidad de Princeton y en el Tata Institute of Fundamental Research (India).
- Propuso su método polinomial para programación lineal entre 1983 (IBM Research) y 1984 (AT&T Bell Laboratories). Ha sido reconocido con el Premio Fulkerson de Matemáticas Discretas de la American Mathematical Society y la Mathematical Programming Society, el Premio Frederick W. Lanchester de INFORMS, el Premio Srinivasa Ramanujan y el Premio Paris Kanellakis de la Association for Computing Machinery.



Motivación

En un problema de minimización, uno normalmente intenta moverse de una solución x^k en la dirección de la función objetivo $c^\top x$. En general, esto violaría las restricciones $\mathbf{A}x = b$, así que se proyecta la dirección c al conjunto de soluciones de este sistema.



Una solución cercana a la frontera podría tener menos mejora que una cercana al centro.

Transformación proyectiva

Suponga que $\mathbf{1}^\top x = n$. Considere la transformación proyectiva $\mathcal{T}(x) = y$ dada por

$$y_j = n\frac{x_j/a_j}{\sum_{i=1}^n x_i/a_i} \text{ para } 1 \leq j \leq n, \tag{1}$$

donde $x^k = a > 0$ es la solución actual. Entonces $\mathbf{1}^\top y = n$ y

$$x_j = n\frac{y_j a_j}{\sum_{i=1}^n y_i a_i} \text{ para } 1 \leq j \leq n \tag{2}$$

es la transformación inversa $\mathcal{T}^{-1}(y) = x$. Si $\mathbf{D}$ es la matriz con diagonal a, entonces

$$\mathcal{T}(x) = y = n\frac{\mathbf{D}^{-1}x}{\mathbf{1}^\top \mathbf{D}^{-1}x} \text{ y } \mathcal{T}^{-1}(y) = x = n\frac{\mathbf{D}y}{\mathbf{1}^\top \mathbf{D}y}. \tag{3}$$

Método de Karmarkar

Este método generará una sucesión de soluciones interiores $x^0, x^1, \ldots$ de modo que eventualmente converja a una solución óptima.

Inicialización Solución interior x^0.

Convergencia Se prueba si se tiene la tolerancia dada por q.

Cálculo de la dirección Se busca una dirección transformada p de mejora.

Solución transformada Se determina una solución transformada y^{k+1}.

Nueva solución Se calcula la nueva $x^{k+1} = \mathcal{T}^{-1}(y^{k+1})$.

Teorema (Karmarkar)

El tiempo de ejecución es $O(n^{7/2}\mathcal{L})$, donde $\mathcal{L}$ es el tamaño de la entrada en bits.

K0 El programa lineal es de la forma

$$
\begin{aligned}
\min z &= c^\top x, && (4)\\
\mathbf{A}x &= \mathbf{0}, && (5)\\
\mathbf{1}^\top x &= n, && (6)\\
x &\geq \mathbf{0} && (7)
\end{aligned}
$$

K1 Existe una solución óptima x^* tal que $c^\top x^* = 0$.

K2 La solución inicial interior $x^0 = \mathbf{1}$ es factible con $z_0 = c^\top x^0 > 0$.

K3 El método genera soluciones interiores x^k y declararemos a x^k óptima si

$$
\frac{z_k}{z_0} = \frac{c^\top x^k}{c^\top x^0} \leq \frac{e^{-q}}{g^0} \tag{8}
$$

donde g^0 es la media geométrica $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^0\right)^{1/n}$ y q es una constante dada.

Método de Karmarkar

Transformación proyectiva del programa lineal

Si aplicamos $\mathcal{T}$ al programa lineal, obtenemos el programa fraccionario

$$\begin{aligned} \min z &= n\frac{d^\top y}{a^\top y} && (9)\\ \mathbf{B}y &= \mathbf{0}, && (10)\\ \mathbf{1}^\top y &= n, && (11)\\ y &\geq \mathbf{0}, && (12) \end{aligned}$$

donde $a = x^k$, $d = \mathbf{D}c$ y $\mathbf{B} = \mathbf{AD}$. Como el óptimo es 0, esto equivale al programa lineal

$$\begin{aligned} \min w &= d^\top y && (13)\\ \mathbf{B}y &= \mathbf{0}, && (14)\\ \mathbf{1}^\top y &= n, && (15)\\ y &\geq \mathbf{0}. && (16) \end{aligned}$$

Observemos que $\mathcal{T}(x^*) = y^*$, mientras que $\mathcal{T}(x^k) = y^k = \mathbf{1}$. El programa lineal transformado no se resolverá para obtener y^*, sino que se obtendrá una solución mejorada y^{k+1} avanzando una distancia $\rho > 0$ desde $y^k = \mathbf{1}$ en la dirección p que resulta de proyectar $-d$ en el espacio nulo de $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{1}^\top \end{pmatrix}$, es decir

$$y^{k+1} = y^k + \rho \frac{p}{\|p\|} = \mathbf{1} + \alpha p. \tag{17}$$

Para que y^{k+1} sea factible se requiere que $\mathbf{1} + \alpha p \geq \mathbf{0}$ y que $\mathbf{F}p = \mathbf{0}$. Para esto

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^\top(\mathbf{F}\mathbf{F}^\top)^{-1}\mathbf{F} \tag{18}$$

es la matriz de proyección al espacio nulo de $\mathbf{F}$.

Por lo tanto, la dirección p se calcula como

$$p = \mathbf{P}(-d) = -\mathbf{PD}c. \tag{19}$$

Se puede demostrar que

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{B}^\top(\mathbf{BB}^\top)^{-1}\mathbf{B} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top \tag{20}$$

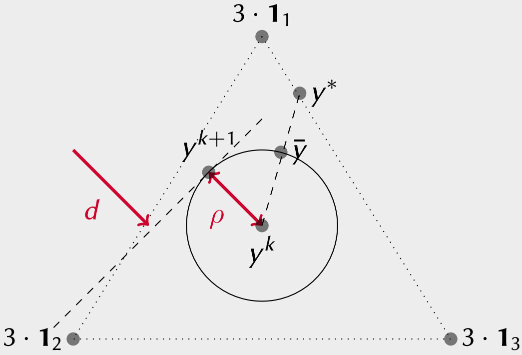
y que por lo tanto

$$p = -d - \mathbf{B}^\top(\mathbf{BB}^\top)^{-1}\mathbf{B}d + \frac{z^k}{n}\mathbf{1}. \tag{21}$$

Método de Karmarkar

Simplejo

Como $y^k = \mathbf{1}$ es el centro del simplejo $\mathcal{S}$ descrito por $\mathbf{1}^\top y = n$ con $y \geq \mathbf{0}$, se puede inscribir una esfera $\mathcal{E}$ de radio $\rho < \sqrt{n/(n-1)}$ en el interior de $\mathcal{S}$.



En lugar de resolver el programa lineal transformado para encontrar y^*, lo resolveremos restringido a la esfera $\mathcal{E}$ de radio ρ, es decir

$$\begin{aligned} \min \bar{w} &= d^\top y && (22)\\ \mathbf{B}y &= \mathbf{0}, && (23)\\ \mathbf{1}^\top y &= n, && (24)\\ \|y - \mathbf{1}\| &\leq \rho, && (25) \end{aligned}$$

el cual tiene la solución trivial

$$y^{k+1} = y^k + \rho \frac{p}{\|p\|} \tag{26}$$

que satisface $y^{k+1} > \mathbf{0}$ y $\|y^{k+1} - \mathbf{1}\| = \rho$ ya que la esfera $\mathcal{E}$ es interior a $\mathcal{S}$.

Lema (Cota superior)

$$\bar{w} = d^\top y^{k+1} \leq \left(1 - \rho/\sqrt{n(n-1)}\right) z_k < (1 - \rho/n) z_k. \tag{27}$$

Demostración.
Sea $\bar{y}$ la intersección de $\mathcal{E}$ con el segmento $y^k y^* = \mathbf{1} y^*$ y sea $\lambda = \frac{\|y^* - \bar{y}\|}{\|y^* - \mathbf{1}\|}$. Entonces $\bar{y} = \lambda \mathbf{1} + (1-\lambda) y^*$, de donde $d^\top \bar{y} = \lambda d^\top \mathbf{1} + (1-\lambda) d^\top y^* = \lambda d^\top \mathbf{1} = \lambda z_k$. Luego

$$d^\top y^{k+1} \leq d^\top \bar{y} = \lambda z_k = \frac{\|y^* - \mathbf{1}\| - \|\bar{y} - \mathbf{1}\|}{\|y^* - \mathbf{1}\|} z_k = \left(1 - \frac{\rho}{\|y^* - \mathbf{1}\|}\right) z_k. \tag{28}$$

Si $n\mathbf{1}_k$ es un vértice de $\mathcal{S}$, entonces $\|y^* - \mathbf{1}\| \leq \|n\mathbf{1}_k - \mathbf{1}\| = \sqrt{n(n-1)}$. ■

Habiendo elegido ρ y calculado y^{k+1}, se calcula $x^{k+1} = \mathcal{T}^{-1}(y^{k+1})$. Si bien y^{k+1} es una mejora sobre y^k, no se puede decir lo mismo de x^{k+1} y x^k. Esto se puede ver de

$$\frac{c^\top x^{k+1}}{c^\top x^k} = \frac{d^\top y^{k+1}}{d^\top y^k} \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^k y_i^{k+1}} \right), \tag{29}$$

en donde el factor de la derecha puede ser tan grande que $c^\top x^{k+1} > c^\top x^k$, es decir $z_{k+1} > z_k$. Aunque esto sí puede pasar, se puede demostrar que

$$\frac{c^\top x^{k+1}}{c^\top x^0} \leq \frac{e^{-\gamma k/n}}{g^0} \tag{30}$$

para alguna $\gamma > 0$, de donde finalmente $\lim_{k\to\infty} c^\top x^k = 0 = z^*$.

Para demostrar que x^k converge a una solución óptima x^*, definimos las funciones de potencial correspondientes a x, y tales que $y = \mathcal{T}(x)$:

$$u(x) = n \ln(c^\top x) - \sum_{j=1}^{n} \ln x_j, \tag{31}$$

$$v(y) = n \ln(d^\top y) - \sum_{j=1}^{n} \ln y_j. \tag{32}$$

En particular, mediremos la mejora de y usando $v_{k+1} - v_k = v(y^{k+1}) - v(y^k)$ y la mejora de x usando $u_{k+1} - u_k = u(x^{k+1}) - u(x^k)$.

Lema (Equivalencia de la mejora)

Si $y = \mathcal{T}(x)$, una mejora medida como una caída de $v(y)$ en el espacio transformado corresponde a una igual mejora medida como una caída de $u(x)$ en el espacio original.

Demostración.

Basta ver que $v(y) - u(x)$ es una constante que sólo depende de x^k:

$$v(y) = n \ln(d^\top y) - \sum_{j=1}^{n} \ln y_j \tag{33}$$

$$= n \ln\left(\frac{nc^\top \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}x}{\mathbf{1}^\top \mathbf{D}^{-1}x}\right) - \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{nx_j/x_j^k}{\mathbf{1}^\top \mathbf{D}^{-1}x}\right) \tag{34}$$

$$= u(x) + \sum_{j=1}^{n} \ln x_j^k. \tag{35}$$

Teorema (Cota en la disminución del potencial)

Las soluciones correspondientes x^{k+1}, y^{k+1} *y sus disminuciones de potencial* $u_{k+1} - u_k = v_{k+1} - v_k$ *satisfacen a cada iteración que* $x^{k+1} > \mathbf{0}$, $y^{k+1} > \mathbf{0}$ *y*

$$u_{k+1} - u_k = v_{k+1} - v_k \leq -\gamma = -1 + \ln 2 \approx -0.307, \tag{36}$$

donde la solución y^{k+1} *se define como el punto que minimiza* $d^\top y$ *sujeto a* $\mathbf{1}^\top y = n$, $\mathbf{B}y = \mathbf{0}$, $\|y - \mathbf{1}\| = \rho$ *y* $\rho = \frac{1}{2}$.

Teorema (Convergencia al óptimo)

$$\frac{c^\top x^k}{c^\top x^0} < \frac{e^{-\gamma k/n}}{g^0}. \tag{37}$$

Demostración.
Sumando $u_k - u_{k-1} < -\gamma$ a partir de $k = 1$ obtenemos $u_k - u_0 < -\gamma k$. Por lo tanto

$$-\gamma k > u_k - u_0 = n \ln(c^\top x^k) - \sum_{j=1}^{n} \ln x_j^k - n \ln(c^\top x^0) + \sum_{j=1}^{n} \ln x_j^0. \tag{38}$$

Como $\ln x$ es cóncava, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln x_j^k \le \ln \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{n} = 0$. Nota $\ln g^0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln x_j^0$. ∎

Cada ejercicio vale 1 punto.

1. Demuestra que $\mathcal{T}$ y su inversa están dados por (3).
2. Calcula la distancia de $\mathbf{1}$ (el centro del simplejo $\mathcal{S}$) a los vértices y caras de $\mathcal{S}$.
3. Completa la prueba del lema de equivalencia de mejora.

Referencias

G. B. Dantzig and M. N. Thapa.
Linear Programming 2: Theory and Extensions.
Springer-Verlag New York, 2003.

IBM Research.
Karmarkar algorithm, 2016, en línea, visitado el 2 de febrero de 2021.
https://researcher.watson.ibm.com/researcher/view_page.php?id=6900.

Wikipedia.
Narendra Karmarkar, en línea, visitado el 2 de febrero de 2021.
https://en.wikipedia.org/wiki/Narendra_Karmarkar.