Métodos de punto interior

Método de Khachiyan

Francisco Javier Zaragoza Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Departamento de Sistemas

2 de febrero de 2021

A diferencia del método simplex, que produce soluciones en la frontera de la región factible, los métodos de punto interior producen soluciones en el interior de la región factible. Así como hay muchas variantes del método simplex, también hay muchas variantes entre los métodos de punto interior:

Método convexo de Von Neumann Históricamente el primero (1948).

Método afín de Dikin Optimiza sobre un elipsoide interior (1967).

Método elipsoidal de Khachiyan El primero polinomial (1979).

Método proyectivo de Karmarkar Reducción de potencial (1984).

Métodos de camino central Con barreras logarítmicas (1986).

Leonid Genrikhovich Khachiyan

Leningrado 1952 — Nueva Jersey 2005

- El matemático armenio Leonid Khachiyan trabajó en la Academia Soviética de Ciencias, en el Instituto de Física y Tecnología de Moscú y en las universidades de Cornell y Rutgers.
- En 1979 propuso en un breve artículo escrito en ruso su método elipsoidal para programación lineal, garantizando su solución en tiempo polinomial cuando todavía se consideraba computacionalmente intratable. Su trabajo fue reconocido con el Premio Fulkerson de Matemáticas Discretas de la American Mathematical Society y la Mathematical Programming Society. A su vez, la INFORMS Optimization Society otorga un premio en su honor.

Método de Khachiyan
Problema de factibilidad

Suponga que se desea encontrar un vector x de dimensión n tal que

$$\mathbf{A}^\top x \leq b, \tag{1}$$

donde $\mathbf{A}^\top$ es una matriz de $m \times n$ y b es de dimensión m. Si denotamos por $A_1, \ldots, A_m$ a las columnas de $\mathbf{A}$, entonces equivalentemente

$$A_i^\top x \leq b_i \text{ para } 1 \leq i \leq m. \tag{2}$$

Supondremos adicionalmente que $n \geq 2$.

Método de Khachiyan

Este método generará una sucesión de elipsoides $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots$ de modo que cada uno contenga un vector x que satisfaga $\mathbf{A}^\top x \leq b$, si es que tal vector existe.

Inicialización Elipsoide inicial $\mathcal{E}_0$.

Factibilidad Se prueba si el centro x^k de $\mathcal{E}_k$ satisface $\mathbf{A}^\top x \leq b$.

Restricción violada Se identifica una restricción $A_i^\top x \leq b_i$ violada por x^k.

Nuevo elipsoide Se calcula un nuevo elipsoide $\mathcal{E}_{k+1}$.

Khachiyan demostró que la factibilidad de $\mathbf{A}^\top x \leq b$ es polinomialmente equivalente a la factibilidad de una ligera perturbación de ese sistema sujeto a tres condiciones:

1. Modificación del método para considerar cálculos de precisión finita.
2. Aplicación a una perturbación adecuada del sistema.
3. Elección apropiada de $\mathcal{E}_0$.

Teorema (Khachiyan)

El tiempo de ejecución es $O(mn^3\mathcal{L})$, donde $\mathcal{L}$ es el tamaño de la entrada en bits.

Si las entradas de $\mathbf{A}$ y b son enteros, entonces $\mathcal{L}$ es la suma de sus tamaños $\langle \mathbf{A} \rangle$ y $\langle b \rangle$ que, a su vez, son la suma de los tamaños $\langle A_{ij} \rangle$ y $\langle b_i \rangle$ de los enteros que los forman más los tamaños de m y n. Si a es un entero, su tamaño $\langle a \rangle$ está dado por $1 + \lceil \log_2(|a| + 1) \rceil$. Entonces

$$\mathcal{L} = \langle m \rangle + \langle n \rangle + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle A_{ij} \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle b_i \rangle. \tag{3}$$

Khachiyan demostró que si el sistema $\mathbf{A}^\top x \leq b$ tiene solución, entonces tiene alguna solución en la esfera de radio $2^{\mathcal{L}}$ centrada en el origen, por lo que se puede usar como $\mathcal{E}_0$.

En principio, se debe probar si el centro x^k del elipsoide $\mathcal{E}_k$ satisface $\mathbf{A}^\top x^k \leq b$. En lugar de eso, Khachiyan probó que es suficiente verificar si el residuo

$$\theta_i(x^k) \equiv A_i^\top x^k - b_i \leq 2^{-\mathcal{L}} \tag{4}$$

para toda $1 \leq i \leq m$. Equivalentemente, el residuo máximo

$$\theta(x^k) \equiv \max_{1 \leq i \leq m} \theta_i(x^k) \leq 2^{-\mathcal{L}}. \tag{5}$$

En este caso, x^k se considera factible y se detiene el método.

Por el contrario, si $\theta(x^k) > 2^{-\mathcal{L}}$, entonces se considera que al menos una restricción ha sido violada. Si escogemos

$$i = \arg\max_{1\leq i\leq m} \theta_i(x^k), \tag{6}$$

entonces $A_i^\top x \leq b_i$ es la restricción máximamente violada.

¿Cómo se encuentra esta restricción?

Si se tiene el sistema $\mathbf{A}^\top x \leq b$ a la mano, se podrían probar sus m desigualdades en tiempo $O(mn)$. Sin embargo, si m fuera exponencial en n, a veces se podría tener un algoritmo de tiempo polinomial en n que decida factibilidad o que identifique una restricción (máximamente) violada. A esto se le llama un oráculo.

Representaremos el elipsoide $\mathcal{E}_k$ como

$$\{x \mid (x - x^k)^\top \mathbf{B}_k^{-1}(x - x^k) \leq 1\} \tag{7}$$

donde $\mathbf{B}_k$ es cierta matriz positiva definida. El nuevo elipsoide $\mathcal{E}_{k+1}$ queda dado por

$$x^{k+1} = x^k - \tau \frac{\mathbf{B}_k A_i}{\sqrt{A_i^\top \mathbf{B}_k A_i}} \tag{8}$$

y

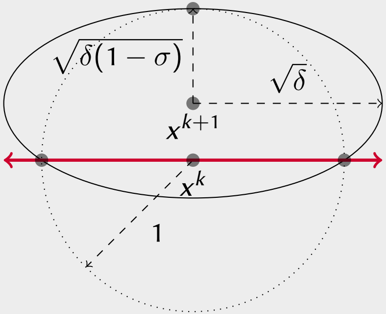
$$\mathbf{B}_{k+1} = \delta \left(\mathbf{B}_k - \sigma \frac{(\mathbf{B}_k A_i)(\mathbf{B}_k A_i)^\top}{A_i^\top \mathbf{B}_k A_i} \right), \tag{9}$$

donde τ, σ y δ son los parámetros de paso, dilatación y expansión respectivamente.

Método de Khachiyan

Interpretación geométrica de los parámetros

Si $\mathbf{B}_k$ fuera un múltiplo de la identidad $\mathcal{I}$, entonces el elipsoide $\mathcal{E}_k$ sería una esfera y el elipsoide $\mathcal{E}_{k+1}$ se encogería un factor $\sqrt{\delta(1-\sigma)}$ en la dirección de A_i y se expandería un factor $\sqrt{\delta}$ en todas las direcciones ortogonales a A_i.

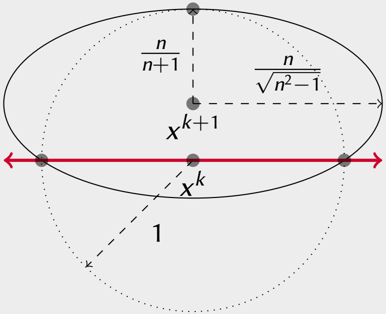


Método de Khachiyan

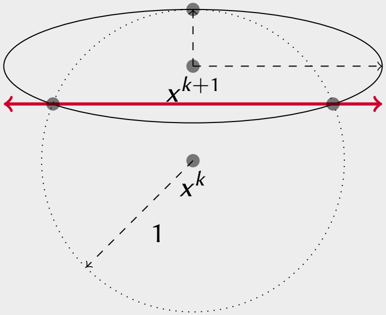
Elección de parámetros (corte central)

Si se elige $\tau = \frac{1}{n+1}$, $\sigma = \frac{2}{n+1}$ y $\delta = \frac{n^2}{n^2-1}$, entonces el elipsoide $\mathcal{E}_{k+1}$ determinado por x^{k+1} y $\mathbf{B}_{k+1}$ es el elipsoide de menor volumen que contiene al semielipsoide

$$\{x \in \mathcal{E}_k \mid A_i^\top x \leq A_i^\top x^k\}. \tag{10}$$



Si se elige $\tau = \frac{1+\alpha n}{n+1}$, $\sigma = \frac{2(1+\alpha n)}{(n+1)(\alpha+1)}$ y $\delta = \frac{n^2(1-\alpha^2)}{n^2-1}$, donde $\alpha = \frac{A_i^\top x^k - b_i}{\sqrt{A_i^\top \mathbf{B}_k A_i}}$, entonces el elipsoide $\mathcal{E}_{k+1}$ determinado por x^{k+1} y $\mathbf{B}_{k+1}$ es el elipsoide de menor volumen que contiene a $\{x \in \mathcal{E}_k \mid A_i^\top x \le b_i\}$.



Método de Khachiyan

Número de iteraciones

Si se usan los parámetros τ, σ y δ que corresponden con los cortes centrales, se puede demostrar que si han transcurrido k iteraciones, entonces

$$\frac{\operatorname{vol} \mathcal{E}_{k+1}}{\operatorname{vol} \mathcal{E}_k} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-\frac{1}{2(n+1)}}. \tag{11}$$

Bajo el supuesto de que el sistema $\mathbf{A}^\top x \leq b$ es factible, el sistema perturbado contiene una esfera de radio $r = 2^{-2\mathcal{L}}$. Si iniciamos con una esfera de radio $R = 2^{\mathcal{L}}$ y el número de iteraciones satisface $k > 2n(n+1)\ln\frac{R}{r}$, entonces el volumen original de $\mathcal{E}_0$ se habrá reducido a menos de $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ de su valor inicial, por lo que $\mathcal{E}_k$ no podría contener una esfera de radio r. Esta contradicción prueba que el método de Khachiyan se debe detener con $k \leq 2n(n+1)\ln\frac{R}{r}$, que es polinomial en $\mathcal{L}$.

Consideremos un programa lineal y su dual

$$\text{máx } c^\top x \text{ sujeto a } \mathbf{A}^\top x \leq b, x \geq \mathbf{0}, \tag{12}$$

$$\text{mín } b^\top y \text{ sujeto a } \mathbf{A}y \geq c, y \geq \mathbf{0}. \tag{13}$$

Usando el teorema fuerte de dualidad, se puede ver que encontrar los valores óptimos de ambos programas es equivalente a encontrar una solución factible al sistema:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^\top x &\leq b && (14)\\
-x &\leq \mathbf{0} && (15)\\
-\mathbf{A}y &\leq -c && (16)\\
-y &\leq \mathbf{0} && (17)\\
-c^\top x + b^\top y &\leq 0. && (18)
\end{aligned}$$

Observaciones

1. El método de Khachiyan no requiere perturbar el sistema con aritmética exacta, pero tal perturbación se requiere para poder probar que termina, pues el sistema no perturbado tal vez no contenga un elipsoide de volumen positivo.
2. El número de iteraciones es $O(n^2\mathcal{L})$, cada iteración hace $O(mn)$ pasos.
3. Una implementación del método de Khachiyan con aritmética de precisión finita requiere $23\mathcal{L}$ bits antes del punto y $38n\mathcal{L}$ bits después del punto.
4. Aunque los cortes profundos son mejores en teoría, en la práctica parece que no.
5. El método elipsoidal de Khachiyan ha resultado importante en la optimización combinatoria, donde con frecuencia el sistema $\mathbf{A}^\top x \leq b$ es exponencialmente grande pero existen oráculos polinomiales (ambos con respecto a n).

Cada ejercicio vale 1 punto.

1. Cuando se consideran los cortes profundos ¿cuánto valen los radios del elipsoide $\mathcal{E}_{k+1}$ en la dirección de A_i y sus direcciones ortogonales?
2. Demuestra la desigualdad que relaciona los volumenes de $\mathcal{E}_{k+1}$ y $\mathcal{E}_k$.
3. Demuestra que $k > 2n(n+1)\ln\frac{R}{r}$ implica la reducción de volumen indicada.

Referencias

R. G. Bland, D. Goldfarb, and M. J. Todd.
The ellipsoid method: A survey.
Operations Research, 29(6):1039–1091, 1981.

J. Pearce.
Leonid Khachiyan, 52; helped to advance computer math.
The New York Times, 2005.

Wikipedia.
Leonid Khachiyan, en línea, visitado el 2 de febrero de 2021.
https://en.wikipedia.org/wiki/Leonid_Khachiyan.