Métodos de punto interior

Método de Von Neumann

Francisco Javier Zaragoza Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Departamento de Sistemas

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Posgrado en Optimización

19 de enero de 2021

A diferencia del método simplex, que produce soluciones en la frontera de la región factible, los métodos de punto interior producen soluciones en el interior de la región factible. Así como hay muchas variantes del método simplex, también hay muchas variantes entre los métodos de punto interior:

Método convexo de Von Neumann Históricamente el primero (1948).

Método afín de Dikin Optimiza sobre un elipsoide interior (1967).

Método elipsoidal de Khachiyan El primero polinomial (1979).

Método proyectivo de Karmarkar Reducción de potencial (1984).

Métodos de camino central Con barreras logarítmicas (1986).

John von Neumann

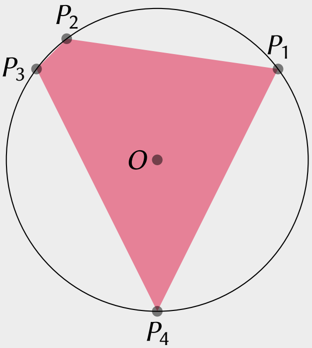
1903 Budapest — 1957 Washington

- Nació *Neumann János Lajos*, nombre que cambió primero al aristocrático húngaro *margittai Neumann János*, posteriormente al alemán *Johann von Neumann* y finalmente al inglés *John von Neumann*.
- Trabajó en las universidades de Berlín, Hamburgo y Princeton y en el Proyecto Manhattan.
- Von Neumann hizo amplias contribuciones a las matemáticas, la física, la economía, la computación y la estadística. Entre muchas otras cosas, propuso la teoría de juegos, el teorema fuerte de dualidad en programación lineal, los autómatas celulares, la arquitectura de Von Neumann y el algoritmo de ordenamiento por mezcla.

El problema del centro de gravedad

Dados n puntos $P_1, \ldots, P_n$ en una esfera m-dimensional, se desea distribuir una masa unitaria en esos puntos de modo que su centro de gravedad sea el centro de la esfera.

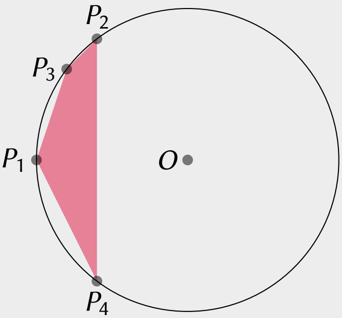
Ejemplo (Factible)



El problema del centro de gravedad

Dados n puntos $P_1, \ldots, P_n$ en una esfera m-dimensional, se desea distribuir una masa unitaria en esos puntos de modo que su centro de gravedad sea el centro de la esfera.

Ejemplo (No factible)



El problema del centro de gravedad
Reformulación

Dados n puntos $P_1, \ldots, P_n$ en la esfera unitaria m-dimensional centrada en el origen, se desean encontrar los coeficientes $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ de una combinación convexa tal que

$$x_1 P_1 + \cdots + x_n P_n = \mathbf{0} \tag{1}$$

con

$$x_1 + \cdots + x_n = 1. \tag{2}$$

El problema del centro de gravedad

Formulado como un sistema lineal

Sea $\mathbf{P}$ la matriz de $m \times n$ cuyas n columnas son los vectores $P_1, \ldots, P_n$, sea x el vector $(x_1, \ldots, x_n)$, sea $\mathbf{1}$ el vector $(1, \ldots, 1)$ y sea $\mathbf{0}$ el vector $(0, \ldots, 0)$. Entonces, el problema del centro de gravedad se puede formular como el sistema lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{P}x &= \mathbf{0} \qquad (3)\\ \mathbf{1}^\top x &= 1 \qquad (4)\\ x &\geq \mathbf{0}, \qquad (5) \end{aligned}$$

sujeto a la condición de que $P_1, \ldots, P_n$ tienen norma unitaria.

Método de Von Neumann

Este método generará una sucesión de vectores $x^0, x^1, \ldots$ de modo que eventualmente la sucesión $b^0 = \mathbf{P}x^0, b^1 = \mathbf{P}x^1, \ldots$ converja a $\mathbf{0}$ o se detecte infactibilidad.

Inicialización Vector x^0 y aproximación $b^0 = \mathbf{P}x^0$.

Cálculo de la dirección Se busca una dirección P_s de mejora.

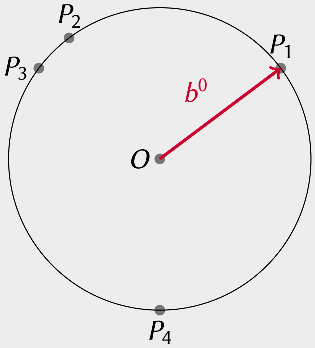
Infactibilidad Si no hay mejora posible, el problema es infactible.

Nueva aproximación Se calculan nuevos x^{k+1} y $b^{k+1} = \mathbf{P}x^{k+1}$.

Método de Von Neumann

Inicialización

Sea $k \leftarrow 0$, sea $x^0 \geq 0$ cualquier vector tal que $\mathbf{1}^\top x^0 = 1$ y sea $b^0 \leftarrow \mathbf{P}x^0$.
Una posibilidad es elegir $x^0 \leftarrow \mathbf{1}_j$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$, lo que daría $b^0 \leftarrow P_j$.

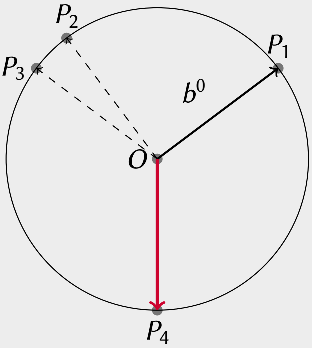


Método de Von Neumann

Cálculo de la dirección

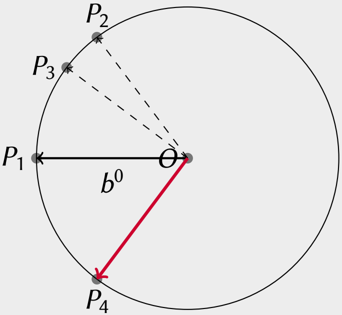
Sea P_s el vector que maximiza el ángulo con b^k, es decir

$$s = \underset{j\in\{1,\ldots,n\}}{\arg\min}\; P_j^\top b^k. \tag{6}$$



Método de Von Neumann
Infactibilidad

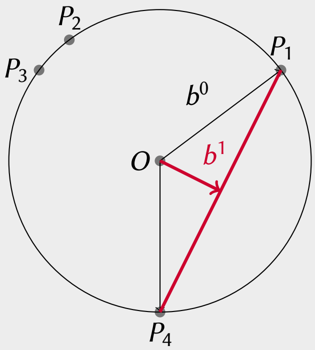
Sea $v_k = P_s^\top b^k$. Si $v_k > 0$, el problema es infactible.



Método de Von Neumann

Nueva aproximación

Sea b^{k+1} el punto más cercano al origen en el segmento de b^k a P_s. Sea $k \leftarrow k + 1$.



Nueva aproximación

Sea b^{k+1} el punto más cercano al origen en el segmento de b^k a P_s, es decir

$$
\begin{aligned}
u_k &= \|b^k\|, && (7)\\
\lambda &= \frac{1 - v_k}{u_k^2 - 2v_k + 1}, && (8)\\
b^{k+1} &= \lambda b^k + (1-\lambda)P_s, && (9)\\
x^{k+1} &= \lambda x^k + (1-\lambda)\mathbf{1}_s. && (10)
\end{aligned}
$$

Posteriormente, sea $k \leftarrow k+1$ y se regresa al cálculo de una nueva dirección.

Propiedades del cálculo de una nueva dirección

Sea γ_s el ángulo formado por P_s y $-b^k$. Observa que $\gamma_s \leq \frac{1}{2}\pi$ si y sólo si $v_k \leq 0$.

Lema (Mejora)

Si $\gamma_s \leq \frac{1}{2}\pi$, entonces b^{k+1} es una combinación convexa de $P_1, \ldots, P_n$ y $\|b^{k+1}\| < \|b^k\|$.

Lema (Infactibilidad)

Si $\gamma_s > \frac{1}{2}\pi$, entonces no hay solución factible.

Teorema (Dantzig)

Si se han completado k iteraciones, entonces $\|b^k\| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Demostración.

Por inducción en $k \geq 1$. Obviamente $\|b^1\| \leq \|b^0\| = \|P_j\| = 1$. Ahora supongamos que $\|b^k\| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ para alguna $k \geq 1$. Como b^{k+1} minimiza $\|\lambda b^k + (1-\lambda)P_s\|$ con $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces podemos escoger $0 < \lambda = \frac{k}{k+1} < 1$ para obtener

$$\|b^{k+1}\|^2 \leq \left\| \frac{k}{k+1} b^k + \frac{1}{k+1} P_s \right\|^2 \tag{11}$$

$$= \frac{1}{(k+1)^2}\left(k^2\|b^k\|^2 + \|P_s\|^2 + 2kP_s^\top b^k\right). \tag{12}$$

La prueba se completa recordando que $P_s^\top b^k \leq 0$ y $\|P_s\| = 1$. ∎

Sea $\epsilon > 0$. Diremos que $x^k \geq 0$ es una ϵ-solución si $\mathbf{1}^\top x^k = 1$ y $u_k = \|b^k\| \leq \epsilon$.

Teorema (Dantzig)

Si el problema es factible, entonces el método de Von Neumann encuentra una ϵ-solución en $\lceil \frac{1}{\epsilon^2} \rceil$ iteraciones o menos (independientemente de n y m).

Demostración.
Es suficiente que $\|b^k\| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \epsilon$, por lo que es suficiente que $k \geq \frac{1}{\epsilon^2}$. ∎

El método de Von Neumann se puede aplicar también a sistemas lineales más generales en los que $\mathbf{P}x = \mathbf{0}$ se reemplaza por $\mathbf{A}x = b$. Los cambios requeridos son:

$$
\begin{aligned}
b^k &= \mathbf{A}x^k, && (13)\\
s &= \operatorname*{arg\,mín}_{j \in \{1,\ldots,n\}} \frac{(A_j - b)^\top (b^k - b)}{\|A_j - b\|}, && (14)\\
u_k &= \|b^k - b\|, && (15)\\
v_k &= (A_s - b)^\top (b^k - b), && (16)\\
\lambda &= \frac{\|A_s - b\|^2 - v_k}{u_k^2 - 2v_k + \|A_s - b\|^2}, && (17)\\
b^{k+1} &= \lambda b^k + (1-\lambda)A_s, && (18)\\
x^{k+1} &= \lambda x^k + (1-\lambda)\mathbf{1}_s. && (19)
\end{aligned}
$$

El primer ejercicio vale 4 puntos. Cada uno de los demás vale 1 punto.

1. Ejecuta el método de Von Neumann con $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (-1, 0)$ y $P_3 = (1, 0)$ comenzando con $x^0 = (1, 0, 0)$. ¿Cuántas iteraciones se necesitan para que $\|b_k\| \leq \epsilon$ con $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$? Sugerencia: escribe un programa.
2. Demuestra que el valor de λ calculado en (8) es correcto.
3. Demuestra el lema de mejora.
4. Demuestra el lema de infactibilidad.
5. Completa la prueba del primer teorema de Dantzig.
6. Modifica esa prueba para mostrar que además $\|b^k\| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.
7. Demuestra que encontrar una solución factible a un sistema lineal es equivalente a encontrar una solución óptima a un programa lineal.

Referencias

G. B. Dantzig and M. N. Thapa.
Linear Programming 2: Theory and Extensions.
Springer-Verlag New York, 2003.

J. P. M. Gonçalves.
A family of linear programming algorithms based on the von Neumann algorithm.
PhD thesis, Lehigh University, Bethlehem, PA, 2004.

Wikipedia.
John von Neumann, en línea, visitado el 19 de enero de 2021.
https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann.