# Métodos Numéricos

Unidad 2. Raíces de Ecuaciones

# Contenido

- Introducción
- Método Gráfico
- Métodos Cerrados
- Métodos Abiertos

# Introducción

# Raíces de Ecuaciones

- El cálculo de raíces se aplica a diversos problemas, en ingeniería son muy comunes en el área de diseño

# Funciones Algebraicas

- Una función $y = f(x)$ es algebraica si se puede expresar de la forma

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \cdots + f_1 y^1 + f_0 = 0$$

- $fi$ se define como un polinomio de *i-ésimo* orden en $x$
- Los polinomios son un tipo de funciones que se representan cómo:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

- En donde $n$ se denomina orden del polinomio y $a$ es una constante

# Funciones Trascendentes

- Son aquellas que no son algebraicas. Comprenden las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y otras
- Ejemplos:

$$f(x) = \ln x^2 - 1$$

$$f(x) = e^{-0.3x} \cos(4x - 3)$$

# Casos en la Búsqueda de Raíces

- Determinar las raíces reales de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Se obtiene el valor de una sola raíz real basándose en un conocimiento de su posición aproximada.

- Determinar todas las raíces reales y complejas de polinomios. Determinan todas las raíces del polinomio en lugar de solo una raíz.

# El Método Gráfico

# El Método Gráfico

- Se basa en graficar diversos puntos para obtener una raíz aproximada.
- Las técnicas gráficas tienen un valor práctico limitado debido a su exactitud
- Pueden ser útiles para obtener valores cercanos a la raíz, estos valores son de utilidad para otros métodos
- También ayudan a comprender el comportamiento de la función

# Métodos Cerrados

- Un método cerrado o de intervalo es aquel que necesita de dos valores iniciales para encontrar la raíz, estos valores deben encerrar o estar a ambos lados de la raíz

# Funcionamiento General

- Existen métodos que se conocen como de búsqueda incremental que aprovechan esta declaración localizando un intervalo en donde la función cambia de signo
- La localización de cambio de signo (y de la raíz) se logra con más exactitud al dividir el intervalo en varios sub intervalo
- Se investiga cada sub intervalo para encontrar el cambio de signo, el proceso se repite y la aproximación a la raíz mejora cada vez más

# Pasos

- Elegir un valor inicial inferior ($x_l$) y uno superior ($x_u$) que encierren a la raíz de tal forma que la función cambie de signo en el intervalo $f(x_l)f(x_u) < 0$
- Una aproximación de la raíz $x_r$ se determina mediante

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

# Pasos

- Si $f(x_l)f(x_r) < 0$, la raíz se encuentra en el sub intervalo inferior o izquierdo por lo que $x_u = x_r$
- Si $f(x_l)f(x_r) > 0$, la raíz se encuentra en el sub intervalo superior o derecho por lo que $x_l = x_r$
- Si $f(x_l)f(x_r) = 0$, la raíz se encuentra en $x_r$

# Método de Bisección

- También se le conoce como corte binario, de partición de intervalos o de Bolzano
- Es un método de búsqueda incremental en el que el intervalo se divide por la mitad
- La posición de la raíz se determina situándola en el punto medio del sub intervalo dentro del cuál ocurre un cambio de signo
- La aproximación de la raíz $x_r$ se determina mediante

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

# Criterio de Paro - Bisección

- Cuando se tiene un estimado de en donde estará la raíz, es sencillo elegir un intervalo
- Cuando no se tiene un estimado, se debe desarrollar un criterio para decidir cuando debe terminar el método
- Para eso se utiliza el error relativo porcentual

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nueva} - x_r^{anterior}}{x_r^{nueva}} \right| x100\%$$

- $x_r^{nueva}$ es la raíz en la iteración actual y $x_r^{anterior}$ es el valor de la raíz en la iteración anterior
- El cálculo se detiene cuando:

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

# Limitantes

- Aunque es un método efectivo, el método de la Bisección puede resultar poco eficiente
- Al no considerarse la división del intervalo de $x_l$ a $x_u$ en mitades iguales, no se consideran las magnitudes de $f(x_l)$ y $f(x_u)$, si una de ellas está más cercana a 0, indicaría que la raíz está más cerca.

# Método de Falsa Posición

- Se trata de un método cerrado que une f($x_l$) con f($x_u$) a través de una línea recta, la intersección de ésta línea con el eje de las x representa una aproximación de la raíz.
- La aproximación de la raíz $x_r$ se determina mediante

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

- El funcionamiento es similar al del método de la secante, cambiando solamente la forma en que se determina $x_r$

# Métodos Abiertos

# Introducción

- Los Métodos abiertos se basan en fórmulas que requieren únicamente de un solo valor de inicio, o un par de ellos, pero que no necesariamente deben encerrar a la raíz.
- Aunque algunas veces se alejan de la raíz, cuando convergen, lo hacen de manera más rápida que los métodos cerrados

# Método de Punto Fijo

- También conocido como iteración simple de punto fijo, se basa en reordenar la ecuación de tal manera que una función f(x) = 0 se convierta en x = g(x)
- Para esto se despeja el término independiente con el exponente más grande

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$x = \sqrt{3x - 5}$$

- En algunos casos se suma x en ambas partes de la ecuación

$$f(x) = e^x + 4$$

$$x = e^x + 4 + x$$

# Funcionamiento

- El funcionamiento se basa en predecir un nuevo valor de x en función del valor anterior de x, de esta manera, dado un nuevo valor para $x_i$ se tiene

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

- La condición de paro se basa en

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| 100\%$$

# Método de Newton-Raphson

- La fórmula de Newton-Raphson es una de las más utilizadas. Se basa en conocer la primera derivada de una función para el cálculo de $x_{i+1}$
- El método de Newton Raphson es muy eficiente aunque hay casos en los que su funcionamiento no es el mejor, especialmente para obtener raíces múltiples.
- También puede resultar complicado evaluar algunas funciones en sus derivadas

# Funcionamiento

- El funcionamiento se basa en predecir un nuevo valor de x en función del valor anterior de x, de esta manera, dado un nuevo valor para $x_i$ se tiene

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- La condición de paro se basa en

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| 100\%$$

# Método de la Secante

- El método de la secante elimina el problema de la derivada que se tiene en el método de Newton Raphson a través de una aproximación de diferencias finitas, con esta aproximación se obtiene la ecuación del método de la secante

- Requiere dos valores iniciales de x, pero no es necesario que f(x) cambie de signo entre los valores dados, es decir que encierre a la raíz, por lo que se considera un método abierto

# Funcionamiento

- El funcionamiento se basa en predecir un nuevo valor de x en función del valor anterior de x, de esta manera, dado un nuevo valor para $x_i$ se tiene

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1})f(x_i)}$$

- La condición de paro se basa en

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$