Métodos Numéricos

Unidad 5. Interpolación

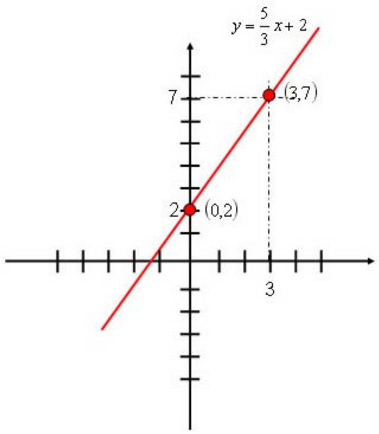
Interpolación

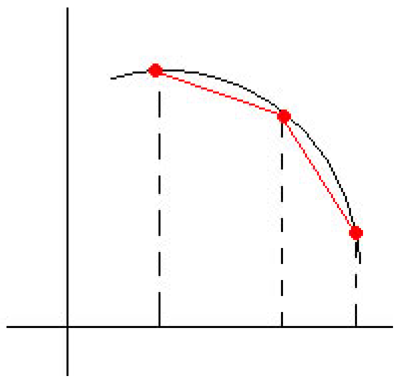
Interpolación

- La Interpolación se refiere a estimar valores intermedios entre datos definidos por puntos
- El método más común que se utiliza es la interpolación polinomial
- Dados n+1 puntos, hay uno y sólo un polinomio de grado n que pasa a través de todos

Ejemplo

- Solo hay una línea recta que une a dos puntos
- Sólo hay una parábola que une un conjunto de tres puntos





Interpolación Polinomial

- Consiste en determinar el polinomio único de n-ésimo grado que se ajuste a n+1 puntos
- Aunque hay uno y solo un polinomio de n-ésimo grado que se ajusta a n+1 puntos

Interpolación Polinomial de Newton

Interpolación de Newton

- El polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas es uno de los métodos más populares que existen

Interpolación Lineal

- La forma más sencilla de interpolación consiste en unir dos puntos con una línea recta

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

- En donde f_1 indica que se trata de un polinomio de interpolación de primer grado

Interpolación Lineal

- En general, mientras menor sea el intervalo entre los datos, mejor será la aproximación

Interpolación Cuadrática

- Una mejor estimación se logra introduciendo una curvatura en una línea que une los puntos
- Si se tienen tres puntos como datos, estos pueden ajustarse en un polinomio de segundo grado

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Interpolación Cuadrática

- Para encontrar b_0 se evalúa la ecuación anterior con $x = x_0$
- Sustituyendo y evaluando en $x = x_1$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Interpolación Cuadrática

- Sustituyendo y evaluando en $x = x_2$ se tiene

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Forma General del Polinomio de Newton

- Se puede generalizar el ajuste para polinomios de n-ésimo grado a n+1 datos

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

- Para un polinomio de n-ésimo grado se requieren n+1 puntos

$$[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$$

Forma General

- De ahí se desprende

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = [x_1, f(x_1)]$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

Polinomio General

- El polinomio General de Interpolación de Newton es:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]$$

$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

- Que también se conoce como polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas

Interpolación de Lagrange

- Es una reformulación del polinomio de Newton que evita el cálculo de diferencias divididas y se representa como:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

- En donde:

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Interpolación de Spline

- Es conveniente dividir el intervalo en pequeños sub intervalos más pequeños y de esta manera utilizar polinomios de grado menor
- Una función *spline* se forma de varios polinomios unidos entre sí por ciertas condiciones de continuidad
- La interpolación a través de Spline Cúbicas ha demostrado ser de las más eficientes

Definición

- Dados los siguientes datos

x	x_o	X_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

- En donde $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y k es un número entero positivo, la función de Spline $S(x)$ es:
  - $S(x_i) = y_i$, para toda $i = 0, 1, 2, \ldots , n$
  - $S(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a k en cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$
  - $S(x)$ tiene derivada continua hasta de orden k-1 en $[x_0,x_n]$

Definición de Splines

- Dado un conjunto de datos, el sistema de Splines se define de la siguiente manera:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & si \;\; x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x) & si \;\; x \in [x_1, x_2] \\ s_3(x) & si \;\; x \in [x_2, x_3] \\ & \vdots \\ s_n(x) & si \;\; x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

- En donde $s_n(x)$ es un polinomio de grado n

Splines de Grado 1, 2 y 3

- Spline de Grado 1

$$s(x) = \begin{cases} y_0 + f[x_1, x_0](x - x_0) & si\ \ x \in [x_0, x_1] \\ y_{n-1} + f[x_1, x_0](x_n - x_{n-1}) & si\ \ x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

  - *En donde f[x1,x0] es una Diferencia Dividida de Newton*

- Spline de Grado 2

$$s(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 & si\ \ x \in [x_0, x_1] \\ a_{n-1} x^2 + b_{n-1} x + c_{n-1} & si\ \ x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

- Spline de Grado 3

$$s(x) = \begin{cases} a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 & si\ \ x \in [x_0, x_1] \\ a_{n-1} x^3 + b_{n-1} x^2 + c_{n-1} x + d_{n-1} & si\ \ x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Consideraciones

- Los valores dela función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores
- La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos
- Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales
- Suponer que en el primer punto, la segunda derivada es cero. Suponer que el primer intervalo tiene un comportamiento lineal.